6

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R. P. R.

G. MIHOC

ELEMENTE DE CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

EDITURA TEHNICA

Scanned with OKEN Scanner

Prof. GHEORGHE MIHOC

ELEMENTE DE CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

6

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R. P. R.
1954

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Calculul probabilităților s'a desvoltat ca o teorie matematică a șirurilor de variabile stocastice independente, care se succed în condiții similare. Aceste variabile se referă la un număr finit de evenimente sau corespund unei distribuții continue. Ele au ca model urna lui Bernoulli și studiul lor constitue teoria clasică a probabilităților.

Fizica, astronomia, balistica, statistica, tehnica, etc., au pus probleme care depășesc teoria clasică. Aceasta a dus la necesitatea de a lucra cu variabile stocastice pentru care evenimentele reprezintă curbe, suprafețe, funcții, etc. De aici s'a simțit nevoia elaborării unei teorii generale a evenimentelor.

Interdependența fenomenelor a dat naștere unor procese stocastice al căror studiu necesită un aparat matematic complex, folosind toate ramurile matematicii actuale.

Lucrarea de față conține o expunere a teoriei clasice a probabilităților, insistând în special asupra modelului urnei lui Bernoulli, care are numeroase aplicații.

Ideile generale care au călăuzit prezenta lucrare sunt inspirate din lucrările probabiliștilor sovietici și români.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

NOȚIUNEA DE PROBABILITATE

1. Considerații introductive

Să considerăm o întreprindere care fabrică anumite produse standardizate și să admitem că din 1000 de piese, 952 corespund standardului stabilit; în acest caz, putem afirma că din 1000 de piese executate în condiții identice, 952 reprezintă *cazuri favorabile*, iar 48 *cazuri nefavorabile*. Desigur, nu în fiecare serie de 1000 de piese se vor obține 952 de cazuri favorabile; într'o serie de 1000 de piese pot fi favorabile mai multe cazuri, în alta pot fi mai puține decât 952. Dacă observăm însă un număr mare de serii de câte 1000 de piese, executate în condiții identice, vom constata că numărul mediu al pieselor corespunzătoare standardului stabilit este foarte apropiat de 952 (aceasta, atâta timp cât nu vor interveni modificări importante în modul de funcționare a fabricii respective: o mai bună utilare cu mașini, ridicarea calificării personalului, etc.). Cifra de 952 $^0/_{00}$ reprezintă, pentru întreprinderea considerată, un indicator al posibilităților ei; în măsura în care numărul seriilor de câte 1000 de piese devine mai mare, stabilitatea acestei cifre apare și mai evidentă. Cunoașterea unui astfel de indicator este extrem de importantă atât în industrie, unde ne furnizează date prețioase asupra calității producției, cât și în alte ramuri de activitate: economie, fizică, chimie, tehnică, astronomie, etc. El ne permite nu numai să apreciem unele evenimente de masă care au avut loc, ci și să tragem concluzii valabile pentru anumite operații de masă care vor avea loc în viitor. Astfel, în exemplul considerat mai sus, atât timp cât condițiile procesului de fabricație rămân aceleași, vom putea spune că, în medie, din fiecare mie de piese, 48 vor fi date la rebut. Folosind un limbaj care va fi precizat mai departe, vom spune că pentru o asemenea întreprindere, probabilitatea de a fabrica o piesă bună este 952 $^0/_{00}$ sau 0,952.

Scanned with OKEN Scanner

Să examinăm următoarea tabelă statistică a naşterilor care au avut loc în Bucureşti între anii 1886 şi 1915 [1].

Anul	*Naşteri* Total	*Naşteri* băieţi	*Coeficientul de masculinitate*
1886	6 592	3 296	0,500
1887	6 453	3 305	0,512
1888	6 753	3 497	0,518
1889	6 676	3 432	0,514
1890	6 649	3 360	0,505
1891	7 214	3 724	0,516
1892	6 734	3 479	0,516
1893	7 458	3 838	0,515
1894	7 680	3 909	0,509
1895	8 170	4 260	0,521
1896	8 112	4 140	0,510
1897	8 949	4 584	0,512
1898	8 462	4 262	0,504
1899	9 245	4 696	0,507
1900	8 766	4 481	0,511
1901	8 547	4 409	0,516
1902	8 091	4 207	0,520
1903	7 954	4 093	0,514
1904	8 167	4 239	0,519
1905	7 915	4 136	0,522
1906	8 448	4 383	0,519
1907	8 647	4 442	0,514
1908	9 156	4 757	0,519
1909	9 089	4 704	0,517
1910	9 151	4 627	0,506
1911	9 619	4 865	0,506
1912	9 976	5 066	0,508
1913	9 975	5 146	0,516
1914	10 485	5 334	0,509
1915	10 601	5 317	0,502

In ultima coloană a fost trecut coeficientul de masculinitate, adică raportul dintre numărul de băieţi născuţi şi numărul total de naşteri.

Din tabelă se constată că acest coeficient oscilează în jurul numărului 0,51 care reprezintă un indicator important în repartizarea noilor născuţi după sex.

Exemple de acelaşi fel se întâlnesc în cele mai variate domenii şi ne conduc în mod natural la noţiunea de probabilitate a unui anumit eveniment pentru o operaţie de masă bine precizată.

Operaţia de masă este caracterizată printr'un număr mare de operaţii individuale, executate în condiţii identice (în primul exemplu

---

[1]) Datele sunt extrase din lucrarea : *G. Milea*, Contribuţii la Demografia Municipiului Bucureşti, prezentată la Şcoala de statistică pentru obţinerea titlului de statistician (1932).

Scanned with OKEN Scanner

considerat, fabricarea unei singure piese); din aceste operații individuale ne interesează un anumit rezultat, de exemplu câte piese din 1 000 corespund condițiilor standardului. Proporția acestor cazuri favorabile în operația de masă dată o numim probabilitatea acestui rezultat sau a acestui eveniment.

Nu trebue uitat însă faptul că probabilitatea unui eveniment are sens atât timp cât condițiile în care are loc operația de masă respectivă rămân neschimbate. Orice schimbare a acestor condiții atrage după sine schimbarea probabilității.

Prin definiție, dacă într'o operație de masă evenimentul E se observă în medie de a ori într'un număr total de b cazuri (operații individuale), probabilitatea evenimentului E, pe care o notăm cu $P(E)$, va fi egală cu fracția $\frac{a}{b}$, adică

$$P(E)=\frac{a}{b}. \qquad (1)$$

Așadar, probabilitatea rezultatului favorabil într'o operație individuală este raportul dintre numărul rezultatelor favorabile observate și numărul total de cazuri care compun operația de masă respectivă.

In virtutea observațiilor făcute la început, se înțelege că, dacă $\frac{a}{b}$ este probabilitatea evenimentului E, în fiecare serie de b operații individuale evenimentul E se poate prezenta și mai puțin decât de a ori și mai mult decât de a ori; în medie, însă, el se poate întâmpla de a sau foarte aproape de a ori și această apropiere este cu atât mai mare, cu cât b este mai mare.

Probabilitatea $P(E)$ este un număr pozitiv sau zero și nu poate fi mai mare decât unitatea, deoarece numărul cazurilor favorabile a nu poate depăși numărul total al cazurilor b; deci $P(E)$ verifică dubla inegalitate

$$0 \leqq P(E) \leqq 1. \qquad (2)$$

Cu cât este mai mare probabilitatea $P(E)$, cu atât se va întâmpla mai des evenimentul E; dacă $P(E)$ este foarte aproape de unitate, în fracția $\frac{a}{b}$ numărătorul este aproape egal cu numitorul, deci în cea mai mare parte a operațiilor rezultatele sunt favorabile; un astfel de eveniment se va întâmpla în majoritatea cazurilor. Dacă $P(E)=1$, evenimentul E se va întâmpla totdeauna sau aproape totdeauna; deci, în mod practic, îl putem considera ca un eveniment „sigur".

Scanned with OKEN Scanner

Dimpotrivă, dacă probabilitatea $P(E)$ este foarte mică, înseamnă că numărătorul a este mic în comparație cu b, evenimentul E se va întâmpla foarte rar. Din punct de vedere practic, putem considera apariția evenimentului E ca imposibilă.

Statisticienii obișnuesc să considere un eveniment ca practic irealizabil, dacă probabilitatea ca el să se producă este mai mică decât un anumit număr (de exemplu 0,03). Determinarea acestui prag de probabilitate, după denumirea pe care o are în statistica matematică, variază dela caz la caz, după importanța și consecințele fenomenului considerat.

In domeniul producției industriale, de exemplu, putem afirma uneori că o serie de produse fabricate este acceptabilă, dacă probabilitatea de a obține un produs care să fie dat la rebut este egală cu $1^0/_{00}$. Dar nu totdeauna ne putem mulțumi cu o astfel de limită.

Astfel, dacă la un depozit de cartușe de mină, $1^0/_{00}$ fac explozie în momentul înmagazinării, se înțelege că, în acest caz, consecințele întâmplării acestui eveniment rar sunt excepțional de grele pentru că explozia unui astfel de cartuș poate distruge multe vieți omenești.

Definirea noțiunii de probabilitate în modul arătat până aici, adică pe cale statistică, are încă nevoie de multe lămuriri.

Dacă ne-am limita numai la acest mod de a ajunge la noțiunea de probabilitate, s'ar putea crede că, deși probabilitatea reprezintă o caracteristică obiectivă pentru fenomenele de masă, care decurge din legea lor de desvoltare, totuși nu putem să o determinăm numericește decât pe cale experimentală, ceeace este greșit. Cunoașterea legii de desvoltare a fenomenelor ne permite să determinăm valoarea probabilității în funcție de elementele fundamentale care intervin în evoluția fenomenului.

Vom arăta că matematicienii din secolul al XVII-lea, cei dintâi care s'au ocupat de teoria probabilităților, au încercat, cu mijloacele științifice reduse din acel timp, să rezolve această problemă.

După cum se știe, cele mai vechi probleme asupra probabilității sunt cele puse de jocurile de noroc. In asemenea categorii de experiențe nu este greu să se distingă cazurile favorabile și cele nefavorabile ale unui anumit rezultat.

De exemplu, dacă se aruncă un zar și se cere să se determine probabilitatea să iasă fața 2, avem un singur caz favorabil (cazul când apare fața 2) și 6 cazuri posibile.

Pornind dela jocurile de noroc, matematicienii P. Fermat (1601—1665), B. Pascal (1623—1662) și J. Bernoulli (1654—1717), care sunt cei dintâi cercetători în domeniul probabilităților, au definit probabilitatea ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile

Scanned with OKEN Scanner

şi numărul cazurilor posibile, considerate ca egal posibile. După această definiţie, dacă, de exemplu, se aruncă un zar perfect construit din punct de vedere geometric şi perfect omogen din punct de vedere fizic, nu există niciun motiv să se creadă că va ieşi cu precădere una dintre feţele pe care sunt însemnate 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte. De aici, o primă constatare: toate cazurile care se pot prezenta sunt *egal posibile*. Dacă evenimentul aşteptat este apariţia feţei cu 5 puncte, numărul total de cazuri egal posibile este 6, iar numărul cazurilor favorabile este unul singur — atunci când se prezintă faţa cu 5 puncte. Valoarea probabilităţii va fi deci $P(E)=\frac{1}{6}$ pentru oricare dintre cele 6 rezultate ale unei aruncări cu zarul.

Definiţia probabilităţii, dată în acest mod, se bazează pe dubla ipoteză:

— Intr'o operaţie de masă, rezultatul este constituit dintr'un număr bine determinat n de cazuri egal posibile, care se exclud reciproc, adică nu se pot întâmpla în acelaşi timp într'o operaţie individuală: o piesă nu poate fi în acelaşi timp bună şi rea, dintr'o aruncare cu zarul nu poate ieşi totodată faţa cu 5 puncte şi cea cu 3 puncte, etc.

— Evenimentul aşteptat E se produce neapărat în operaţia de masă în a din cazuri, numite favorabile (lui E) şi nu se produce în celelalte $N-a$ cazuri, numite nefavorabile (lui E).

Două sunt obiecţiunile cele mai importante care se aduc acestei definiţii a probabilităţii.

Prima, că este ruptă de lumea reală şi a doua, că este inaplicabilă atunci când numărul cazurilor posibile este infinit, sau când discriminarea cazurilor egal posibile nu se poate face.

Le vom examina pe rând.

Intâi trebue să cunoaştem ce înseamnă în calculul probabilităţilor noţiunea de frecvenţă. Să presupunem că, aruncând de 100 de ori o monetă, una dintre feţe a ieşit de 53 de ori. Raportul $\frac{53}{100}$ se numeşte frecvenţă. Prin urmare, frecvenţa înseamnă un fapt experimental. Dacă din n experienţe, un eveniment s'a verificat de m ori, raportul $\frac{m}{n}$ ne dă frecvenţa corespunzătoare apariţiei evenimentului considerat în seria de experienţe făcute. Se vede imediat că frecvenţa este un număr pozitiv cuprins între 0 şi 1, incluziv aceste valori.

In exemplele pe care le-am dat, am considerat frecvenţele unor evenimente într'o serie de mai multe experienţe şi am constatat că ele oscilează în jurul unor anumite valori. Astfel, pentru fenomenele la care are loc această stabilitate a frecvenţelor, am ajuns pe cale

statistică la definiția noțiunii de probabilitate. Noțiunea teoretică de probabilitate a unui eveniment nu poate fi despărțită de noțiunea de frecvență. Calculul probabilităților se poate aplica numai fenomenelor pentru care există o stabilitate a frecvențelor în jurul probabilității. Aceasta este baza legăturii teoriei matematice a probabilităților cu lumea reală, cu practica.

Este însă evident că o definiție a probabilității în care nu se spune nimic despre comportarea reală a fenomenului nu poate să ducă la nicio concluzie privind această comportare. Incercarea de a ajunge la o asemenea concluzie cu ajutorul unei teoreme (teorema lui Bernoulli) a fost combătută de toți probabiliștii de seamă. Cu privire la aceasta, considerăm util să citâm argumentele aduse de prof. A. I. Hincin, într'un studiu apărut recent:

„Acesta este primul defect al interpretării clasice a probabilității; această teorie nu conține niciun fel de punte care să ducă dela calculele teoretice la statistica reală a evenimentelor și nici nu o poate crea prin mijloacele ei proprii. Toate legăturile imaginare cu realitatea, care se presupun a fi stabilite de teorema lui Bernoulli, sunt bazate pe neînțelegere. După cum se întâmplă de obicei, dacă în știință apare în adevăr o situație grea de acest gen, dacă apare o deficiență pe care știința, în epoca respectivă, nu o poate înlătura, filosofia idealistă atacă acest «călcâi al lui Achille» căutând să arate că deficiența apărută nici nu poate fi înlăturată prin mijloacele științei materialiste ci, dimpotrivă, toate legăturile se restabilesc și tabloul devine complect de îndată ce ne situăm pe pozițiile teoriei idealiste a cunoașterii.

In cazul examinat de noi mai sus, «rezolvarea» idealistă a problemei este următoarea: dacă zarul este regulat din punct de vedere geometric și omogen din punct de vedere fizic, noi nu avem niciun motiv să ne așteptăm ca, în mai multe aruncări ale acestui zar, o față oarecare a lui să apară mult mai frecvent de cât alta; deaceea, în mod firesc ne așteptăm ca frecvența de apariție să fie, de regulă, aproximativ aceeași pentru toate fețele zarului și, în particular, frecvența de apariție a numărului 5 să fie aproximativ egală cu $\frac{1}{6}$. Experiența confirmă această ipoteză a noastră. Aceasta este tot!

Prin urmare, fenomenul trebue să decurgă așa și nu altfel, nu datorită faptului că desfășurarea lui este condiționată de natura obiectivă a acestui fenomen, ci fiindcă *noi ne așteptăm* tocmai la această desfășurare a lui, fiindcă *noi am fi mirați* dacă el s'ar desfășura altfel. Această concepție cu totul idealistă s'a încuibat temeinic în bazele teoriei probabilităților. Ea poate fi întâlnită nu numai în multe manuale obișnuite, dar de multe ori și în lucrările unor

mari savanți, care se situează în general pe poziții materialiste juste, dar care nu privesc cu suficientă rigurozitate și consecvență bazele filozofice ale științei lor (v. de exemplu, «Calculul probabilităților» de acad. A. A. Markov). Într'o serie de manuale întâlnim afirmații că probabilitatea ar fi chemată «să măsoare gradul siguranței noastre de apariție a evenimentului» sau «gradul speranței noastre că evenimentul va avea loc». Într'un cuvânt, dintr'o caracteristică obiectivă a naturii fenomenului studiat, probabilitatea evenimentului se transformă într'un indice pur subiectiv, chemat să caracterizeze nu atât însuși fenomenul studiat, cât raportul nostru subiectiv față de acesta".[1])

Ruperea definiției clasice a probabilității de lumea reală reiese clar din cele arătate mai sus. In ce privește a doua importantă obiecție care se aduce acestei definiții, ea nu este mai puțin categorică.

După cum știm, definiția probabilității ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile se bazează esențial pe discriminarea cazurilor egal posibile. Dacă vom considera un zar perfect construit din punct de vedere geometric și perfect omogen din punct de vedere fizic, apariția fiecărei fețe a zarului constitue un caz egal posibil. Definiția este deci aplicabilă. Să presupunem, însă (ceeace este conform cu realitatea), că zarul nu este perfect construit din punct de vedere geometric și fizic, că nu se poate realiza o perfectă simetrie din punct de vedere geometric, că nu se poate vorbi de un centru de simetrie al zarului și, cu atât mai puțin, de faptul că centrul lui de greutate coincide cu centrul de simetrie. In acest caz, este evident că dispare orice posibilitate de clasificare a feței zarului în cazuri egal posibile. Se vede astfel că nici atunci când avem un număr finit de cazuri posibile, de cele mai multe ori nu se poate face discriminarea lor în cazuri egal posibile[2]). Iar când trecem la un număr infinit de cazuri, dificultățile devin și mai mari. La imposibilitatea clasificării cazurilor se mai adaugă și faptul că numărul cazurilor posibile este infinit. Putem da nenumărate exemple: să se găsească probabilitatea ca un număr natural, luat la întâmplare, să fie prim; să se determine probabilitatea ca o curbă închisă, de lungime dată, să închidă o

---

[1]) *A. I. Hincin*, Metoda funcțiilor arbitrare și lupta împotriva idealismului în teoria probabilităților, Izd. Akademii Nauk S. S. S. R. 1952, p. 520. Studiul a apărut tradus în limba română, în Analele Româno-Sovietice, Matematică-Fizică, Nr. 2, 1953.

[2]) Procedeul este aplicabil numai pentru schemele probabilistice construite cu mare atenție. De exemplu, o urnă în care sunt așezate bile identice, ca formă și greutate, pentru care se folosește un sistem de extracție astfel încât bilele să nu poată fi deosebite între ele; o ruletă, etc.

Scanned with OKEN Scanner

arie mai mică decât un număr dat, etc. Mai trebue să adaugăm că definiţia clasică a probabilităţii nu poate fi admisă şi pentru faptul că ea nu se aplică unei categorii largi de fenomene.

Astfel, numai prin clasificarea cazurilor egal posibile şi fără a recurge la frecvenţă nu se poate determina a priori probabilitatea ca dintr'un număr de N persoane de aceeaşi vârstă, peste un an să fie n în viaţă, sau probabilitatea ca peste o anumită regiune să cadă grindina într'un interval de timp dat, etc.

Să înlăturăm astfel posibilitatea aplicării calculului probabilităţilor la studiul fenomenelor naturale şi sociale. Calculul probabilităţilor încetează de a mai fi o ştiinţă, limitându-se a fi un studiu matematic, lipsit de aplicaţie, al jocurilor de noroc.

Acestea sunt motivele pentru care definiţia clasică, adoptată de primii cercetători în domeniul probabilităţilor nu mai corespunde nivelului actual al ştiinţei.

2. Probabilitate, frecvenţă

Definiţia pe care am dat-o probabilităţii, bazată pe noţiunea de frecvenţă, trebue să fie precizată.

Pe baza observaţiilor şi a experienţelor, oamenii de ştiinţă ajung la formularea legilor fenomenelor naturii şi societăţii. Aceste legi sunt obiective, generale şi necesare. Faptul că sunt necesare înseamnă că, la fiecare realizare a unui ansamblu de condiţii A, are loc totdeauna evenimentul B. De exemplu, apa la o presiune atmosferică de 760 mm, la temperatura de peste 100°C, etc., adică la îndeplinirea unui ansamblu de condiţii A, se transformă totdeauna în vapori (evenimentul B). La îndeplinirea ansamblului de condiţii A (pentru care se realizează descompunerea apei în elemente simple), apa se descompune totdeauna în hidrogen şi oxigen (evenimentul B).

Considerând un grup de N oameni, suntem siguri că la îndeplinirea condiţiilor A (sunt de aceeaşi vârstă, locuesc în aceeaşi regiune, beneficiază în aceeaşi măsură de ştiinţa medicală, etc.), niciunul nu va fi în viaţă peste un anumit număr de ani, când vor fi atins o anumită vârstă care, în actuala fază a ştiinţei, constitue limita superioară a vieţii omeneşti (evenimentul B).

In asemenea împrejurări, vom spune că evenimentul B este sigur.

Deasemenea, pe baza legilor obiective ale fenomenelor, rezultă şi evenimentul imposibil, care este contrarul evenimentului sigur.

Există însă o vastă categorie de fenomene pentru care, la îndeplinirea unui ansamblu de condiţii A, nu rezultă cu necesitate evenimentul B, dar atunci când avem o repetare a unui număr

Scanned with OKEN Scanner

mare de experienţe, cu îndeplinirea ansamblului de condiţii A, se manifestă o anumită regularitate, exprimată prin oscilarea frecvenţei în jurul unui număr care reprezintă o valoare caracteristică obiectivă pentru fenomenul considerat. Vom spune că, pentru un asemenea fenomen, probabilitatea ca la îndeplinirea sistemului de condiţii A să se realizeze evenimentul B este egală cu p.

In grupuri formate cu un număr mare de probe, frecvenţele reprezintă valorile experimentale ale probabilităţii p, care este o constantă obiectivă, depinzând de natura fenomenului considerat şi de sistemul de condiţii A.

In anumite cazuri, determinarea probabilităţii p se poate face direct. A. I. Hincin a elaborat o metodă, pe care a numit-o *metoda funcţiilor arbitrare*, care permite deducerea stabilităţii frecvenţelor unor anumite fenomene mecanice şi, în consecinţă, determinarea probabilităţii respective din studiul legilor de desvoltare a acestor fenomene. Deşi deosebit de importantă, nu vom expune această metodă, care cere cunoştinţe de matematică depăşind nivelul acestui manual.

In celelalte cazuri, dacă motive teoretice, pornind dela analiza cauzelor care determină fenomenul, ne conduc la o anumită valoare a probabilităţii sau la o anumită formă a probabilităţii ca funcţie, de exemplu, de un parametru numeric care urmează să fie determinat, vom ajunge la determinarea probabilităţii p folosind faptul că, la repetarea experienţelor în sistemul de condiţii A, frecvenţele se grupează în jurul lui p.

Să presupunem, astfel, că admitem probabilitatea de a ieşi faţa *1* a unui zar egală cu $\frac{1}{6}$ şi că, făcând numeroase grupuri de aruncări, constatăm că frecvenţele se depărtează sistematic de $\frac{1}{6}$. Ştiind că obţinerea acestui rezultat are cauze obiective perfect determinate, putem afirma că probabilitatea evenimentului nu este egală cu $\frac{1}{6}$, iar valoarea probabilităţii p va fi determinată numai empiric, în raport cu frecvenţele obţinute.

Să mai presupunem, luând un exemplu din demografie, că avem motive teoretice pentru a pune probabilitatea p_x, ca un individ de vârstă x să fie în viaţă peste un an, sub forma $sg^{c^{x(c-1)}}$, unde s, g, c sunt nişte constante în raport cu vârsta, ale căror valori trebue să le găsim. Pentru determinarea acestor constante numerice folosim legile obiective de desvoltare a fenomenului de masă al mortalităţii, care ne arată că, dacă sunt îndeplinite anumite condiţii (ansamblul condiţiilor A în cazul de faţă), frecvenţele se

Scanned with OKEN Scanner

grupează în jurul probabilității p_x. Pe baza frecvențelor, luate în număr suficient de mare, se determină valorile s, g, c și deci p_x, iar experiențele ulterioare ne arată dacă putem sau nu să admitem valoarea probabilității p_x astfel găsită. Odată justificată valoarea p_x a probabilității, putem să o folosim la calculul primelor și rezervelor matematice din asigurarea de viață, deoarece ea nu reprezintă o valoare teoretică, ruptă de realitate, obținută prin calcule formale, ci rezultă din studiul adâncit al fenomenului demografic respectiv.

Astfel se explică succesele obținute de calculul probabilităților în cele mai variate domenii ale științei, ca fizica, astronomia, balistica, demografia, etc.

Matematicienii din secolul al XVII-lea, care au creat calculul probabilităților, au avut o intuiție justă când au admis existența unei probabilități decurgând din natura fenomenului respectiv. Ei au definit probabilitatea pe baza unei structuri obiective a fenomenelor, simetria. Desigur că, limitându-se numai la aceas ă latură a fenomenelor și nu la întregul complex de cauze care determină un fenomen, ei nu puteau ajunge la o definiție satisfăcătoare a probabilității și de aici au decurs toate inconvenientele definiției clasice, pe care le-am arătat. Este drept că nici nivelul cunoștințelor matematice din acel timp nu permitea să se realizeze mai mult.

Acest punct slab în fundamentarea teoretică a calculului probabilităților a fost folosit ulterior de filosofia idealistă.

Criticând lipsurile definiției clasice, unii matematicieni au alunecat pe panta unei poziții agnostice, renunțând la posibilitatea determinării probabilității pe baza legilor obiective de desvoltare a fenomenelor. Ei au ajuns astfel la așa numita teorie a frecvențelor, care definește probabilitatea ca limită a frecvenței, atunci când fenomenul ar fi supus unui număr nelimitat de probe. Dacă notăm prin f_n frecvența corespunzătoare pentru n probe, avem

$$p = \lim_{n \to \infty} f_n. \tag{3}$$

Creatorul acestei teorii, Mises, a arătat că o mare parte din lipsurile definiției clasice sunt înlăturate prin adoptarea unei asemenea definiții.

El se referă în special la legătura dintre frecvență și probabilitate, care am văzut că nu rezultă din definiția clasică.

Impotriva acestei definiții se pot însă aduce argumente hotărîtoare.

Intâi vom semnala lipsa de precizie matematică în tinderea la limită a frecvenței f_n.

Scanned with OKEN Scanner

Frecvența fiind un fapt experimental, procesul de limită conținut în relația (3) nu poate fi în general definit matematic. De aici, introducerea artificială în calculul probabilităților a instrumentului matematic și a tehnicei matematice moderne. Dificultățile matematice decurgând din relația (3) au contribuit ca niciunul dintre probabiliștii de seamă ai epocei noastre să nu fie adept al teoriei lui Mises, care și-a câștigat partizani mai mult în rândurile fizicienilor.

După teoria lui Mises, probabilitățile sunt pur și simplu rezultatele experienței, nefiind condiționate de particularitățile interne ale fenomenelor. Prin aceasta, Mises se dovedește a fi un adept al concepției gnoseologice a lui Mach, de interpretare a legilor naturii ca o formă comodă de înregistrare a datelor experimentale.

Progresul realizat în ultimii ani în teoria probabilităților a eliminat definitiv teoria agnostică a lui Mises.

3. Prezentarea axiomatică

Calculul probabilităților constitue astăzi o disciplină matematică complect închegată ca geometria, mecanica rațională, algebra, etc. La acest lucru s'a ajuns datorită construirii axiomatice a teoriei probabilităților, concepută de ilustrul matematician sovietic A. N. Kolmogorov.

Trebue să menționăm că, până la începutul secolului nostru, noțiunile de bază ale teoriei probabilităților erau neprecise. Din această cauză, multe dintre cercetările și rezultatele obținute în teoria probabilităților erau privite cu neîncredere chiar de unii matematicieni cu experiență. Folosind metode de cercetare care păreau juste, se ajungea uneori la paradoxuri, constând în găsirea mai multor valori pentru probabilitatea aceluiași eveniment (paradoxul lui Bertrand).

Afară de aceasta, desvoltarea științelor naturii a dus la fundamentarea axiomatică a majorității disciplinelor matematice. Matematica este unul dintre cele mai importante instrumente de cunoaștere și cercetare a naturii. La baza oricărei discipline matematice stau câteva principii admise ca adevărate, rezultând din generalizarea experiențelor anterioare. Pe baza acestor axiome, întreaga disciplină matematică se construește ca o teorie unitară, pe bază de deducții logice. Deoarece axiomele rezultă din studiul îndelungat al fenomenelor naturii și din datele experimentale obținute paralel cu desvoltarea lor, rezultatele matematicii obținute pe cale deductivă se întorc la științele naturii, pentru a găsi aici nenumărate aplicații.

A. N. Kolmogorov a reușit să dea calculului probabilităților fundamentarea axiomatică necesară desvoltării lui. Meritul acestei

Scanned with OKEN Scanner

axiomatizări constă în faptul că axiomele care stau la baza teoriei probabilităţilor rezultă din legile de desvoltare a fenomenelor de masă şi sunt o consecinţă a lor.

Calculul probabilităţilor constitue astăzi o teorie matematică riguros construită, capabilă să satisfacă cerinţele ştiinţelor naturii. Mai trebue să adăugăm că axiomatizarea făcută de Kolmogorov leagă strâns teoria probabilităţilor de teoria modernă a funcţiilor reale, făcând astfel din calculul probabilităţilor unul dintre cele mai moderne domenii ale matematicii contemporane.

Obiectele de bază ale calculului probabilităţilor sunt *evenimentele* şi *probabilităţile* respective.

Proprietăţile lor matematice sunt o transpunere a celor constatate experimental.

O anumită experienţă care pune în evidenţă un singur eveniment nu interesează calculul probabilităţilor. Aruncarea unui proiectil, de exemplu, nu interesează calculul probabilităţilor, deoarece evenimentul pe care-l provoacă este unic. Tragerea unui număr mare de proiectile asupra unei ţinte interesează acest calcul, pentrucă unei astfel de experienţe îi corespund mai multe evenimente posibile.

Considerând experienţele cărora le corespund mai multe evenimente, vom constata că aceste evenimente se bucură de unele proprietăţi care pot fi formulate matematic. Ele formează împreună o structură care poate fi formulată matematic şi pe care o vom numi *câmp de evenimente*.

Unei experienţe îi corespunde un câmp de evenimente. Să luăm experienţa clasică a aruncării zarului. Referitor la această experienţă, avem de considerat mai multe evenimente.

Zarul are şase feţe. Apariţia fiecărei feţe constitue un eveniment. Notând, de exemplu, apariţia feţei *1* cu (1), a feţei *2* cu (2), avem de considerat următoarele evenimente:

$$(1),\ (2),\ (3),\ \ldots,\ (6). \qquad (I)$$

Alte categorii de evenimente sunt de forma următoare: apariţia feţei *1* sau a feţei *2*, pe care o notăm cu: (1, 2).

Prin urmare (1, 2) reprezintă evenimentul constând în apariţia fie a feţei *1*, fie a feţei *2*.

Evenimentele din această categorie sunt

$$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ \ldots,\ (5,\ 6). \qquad (II)$$

Ele sunt în număr de $C_6^2 = 15$.

Să considerăm acum evenimente de forma (1, 2, 3); evenimentul (1, 2, 3) constă în apariţia uneia dintre feţele *1*, *2*, *3*. Totalitatea evenimentelor de acest fel este

$$(1, 2, 3)\ (1, 2, 4), \ldots, (4, 5, 6). \qquad \text{(III)}$$

Numărul lor este egal cu $C_6^3 = 20$.

In mod analog vom nota evenimentul (1, 2, 3, 4) care constă în apariţia uneia dintre feţele *1*, *2*, *3*, *4*:

$$(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), \ldots, (3, 4, 5, 6). \qquad \text{(IV)}$$

Numărul lor este egal cu $C_6^4 = 15$.

In acelaşi fel considerăm evenimentele

$$(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 6), \ldots, (2, 3, 4, 5, 6). \qquad \text{(V)}$$

în număr de $C_6^5 = 6$.

La aceste evenimente vom adăuga

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6), \qquad \text{(VI)}$$

care reprezintă apariţia uneia dintre feţele *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*.

Atunci când aruncăm un zar, suntem siguri că va ieşi una dintre feţele lui. Evenimentul (1, 2, 3, 4, 5, 6) reprezintă prin urmare *evenimentul sigur*.

Să considerăm acum şi *evenimentul imposibil*, care constă în faptul că nu iese niciuna dintre feţele zarului.

Câmpul de evenimente referitor la experienţa noastră se compune prin urmare din totalitatea evenimentelor (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), la care adaugăm şi evenimentul imposibil. Numărul lor fiind egal cu 2^6, spunem că avem un câmp finit de evenimente cu 2^6 elemente.

O examinare mai atentă a acestui câmp particular de evenimente ne conduce la unele proprietăţi generale.

Să considerăm evenimentele (1) şi (1, 2).

Primul constă în apariţia feţei *1*, iar al doilea, în apariţia feţei *1* sau a feţei *2*. Este însă evident că, în cazul în care are loc primul eveniment, are loc şi evenimentul al doilea.

Spunem că evenimentul (1) implică evenimentul (1, 2) şi îl notăm astfel:

$$(1) \subset (1, 2).$$

In general, dacă realizarea evenimentutui A implică realizarea evenimentului B, scriem:

$$A \subset B.$$

Dacă A implică evenimentul B și B implică evenimentul A, adică avem

$$A \subset B; \quad B \subset A,$$

spunem că evenimentele A și B sunt echivalente.

Să considerăm evenimentul (1, 2). El constă în apariția feței *1* sau a feței *2* sau, după notațiile noastre, în apariția evenimentului (1) sau a evenimentului (2).

Constatăm că, întrucât (1), (2) sunt două evenimente corespunzătoare experienței noastre, (1) sau (2) este deasemenea un eveniment; notăm acest eveniment astfel: $(1) \cup (2)$. Avem deci:

$$(1) \cup (2) = (1, 2).$$

In general, pentru orice câmp de evenimente, dacă considerăm două evenimente oarecare A și B, $A \cup B$, adică sau A sau B, reprezintă deasemenea un eveniment din câmpul considerat.

Am definit astfel între evenimente operația $\cup$, care la două evenimente A, B face să corespundă evenimentul $A \cup B$. Evenimentul $A \cup B$ îl vom numi reuniunea evenimentelor A, B, și îl vom citi deobicei *A sau B*, ori *A reunit cu B*.

Să considerăm acum evenimentele (1, 2, 3), (1, 3). Evenimentul care constă în realizarea simultană și a evenimentului (1, 2, 3) și a evenimentului (1, 3) este evident evenimentul (1), și îl vom nota astfel:

$$(1) = (1, 2, 3) \cap (1, 2).$$

In general, dacă A și B sunt două evenimente din același câmp, vom nota cu

$$A \cap B$$

evenimentul care constă în realizarea simultană a evenimentului A și a evenimentului B. Evenimentul

$$A \cap B$$

îl vom citi *A și B* sau *A intersectat cu B*.

Am definit astfel două operații $\cup$ și $\cap$ (operațiile $\cup$ și $\cap$ se numesc respectiv *operația de reuniune* și *operația de intersecție*) care vor avea un rol important în desvoltarea care urmează.

Inainte de a trece mai departe, să observăm că, din aproape în aproape, putem defini evenimentele:

$$A \cup B \cup \ldots \cup L$$

$$A \cap B \cap \ldots \cap L.$$

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu

$$(1, 2, 3) \cup (4, 5) \cup (1, 4) = (1, 2, 3, 4, 5)$$

și

$$(1, 2, 3) \cap (2, 5, 6) \cap (1, 2) = (2).$$

Să considerăm acum evenimentele $(1, 2)$ și $(3, 4)$ și să precizăm ce reprezintă intersecția $(1, 2) \cap (3, 4)$.

Aceasta înseamnă verificarea evenimentului $(1, 2)$ și a evenimentului $(3, 4)$ împreună, ceeace este însă imposibil. Dar evenimentul *imposibil*, pe care-l notăm cu Φ, face și el parte din câmpul nostru de evenimente, astfel încât nu se contrazice proprietatea generală că intersecția a două evenimente dintr'un câmp ne dă deasemenea un eveniment al câmpului. Putem deci scrie

$$(1, 2) \cap (3, 4) = \Phi.$$

Evenimentele $(1, 2)$ și $(3, 4)$ sunt *incompatibile*, adică nu pot avea loc în același timp.

In general, dacă pentru două evenimente A și B

$$A \cap B = \Phi,$$

evenimentele A și B se numesc *incompatibile*. Să considerăm evenimentele $(1, 2, 3)$ și $(4, 5, 6)$. Ele sunt incompatibile, adică avem:

$$(1, 2, 3) \cap (4, 5, 6) = \Phi.$$

După o proprietate generală a câmpurilor de evenimente, reuniunea lor duce, după cum știm, tot la un eveniment al câmpului, și anume:

$$(1, 2, 3) \cup (4, 5, 6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

adică la evenimentul *sigur*. Spunem în acest caz, că evenimentele $(1, 2, 3)$ și $(4, 5, 6)$ sunt *complementare* și le notăm astfel:

$$C(1, 2, 3) = (4, 5, 6); \quad C(4, 5, 6) = (1, 2, 3).$$

In general, spunem că evenimentul A este *complementarul* evenimentului B, adică

$$A = CB$$

dacă

$$A \cap B = \Phi, \quad A \cup B = E,$$

unde am notat cu E evenimentul *sigur*.

Să observăm însă că, în cazul de față, $(1, 2, 3)$ fiind un eveniment al câmpului, complementarul său $(4, 5, 6)$ este deasemenea un eveniment al câmpului considerat. Aceasta este deasemenea o proprietate generală pentru câmpurile de evenimente. Prin urmare,

Scanned with OKEN Scanner

dacă A este un element al unui câmp de evenimente, complementarul său CA este şi el un element al câmpului respectiv.

Proprietăţile evenimentelor arătate mai sus, care rezultă atât de simplu din exemplul cu zarul, sunt proprietăţi generale, deoarece le întâlnim la oricare alte exemple de evenimente.

Evenimentele (1), (2), (3), (4), (5), (6), constând în ieşirea feţelor zarului, se numesc *evenimente elementare.*

Un eveniment A al unui câmp este *elementar* dacă, faţă de un eveniment oarecare B al câmpului, are una dintre situaţiile:

1) A este incompatibil cu B;

2) A implică B, adică $A \subset B$.

Evenimentul sigur în cazul zarului constă în apariţia unuia dintre evenimentele elementare (1), (2), (3), (4), (5), (6).

Reuniunea evenimentelor elementare ne dă evenimentul sigur. Pentru construirea unui câmp de evenimente, pornim deci dela evenimentul sigur E şi componentele lui, evenimentele elementare (ξ), (η), (ζ), ...

Toate celelalte sunt reuniuni de evenimente elementare, trebuind să îndeplinească condiţiile ca reuniunile, intersecţiile şi complementarul lor să fie deasemenea evenimente ale aceluiaşi câmp.

Fără a ieşi din cadrul elementar al acestui manual, putem să folosim primele noţiuni din teoria mulţimilor, care exprimă cele de mai sus sub o formă echivalentă.

Fie E o mulţime de elemente şi F o mulţime de părţi ale lui E. Spunem că F este un câmp de evenimente şi numim evenimente elementele mulţimii F dacă F conţine pe E, intersecţia şi reuniunea a două părţi din F şi complementarul fiecărei părţi din F[1]).

Proprietăţile de mai sus se păstrează şi în cazul când numărul evenimentelor este infinit. Ele sunt uşor de reţinut, atunci când se consideră câmpul de evenimente ale cărui elemente sunt punctele din plan, cuprinse într'o anumită regiune, de exemplu într'un pătrat.

Fiind date două curbe închise în pătrat, să considerăm ca eveniment A alegerea unui punct în interiorul primei curbe şi ca eveniment B, alegerea unui punct în interiorul celeilalte curbe.

Diferitele operaţii cu aceste evenimente rezultă uşor din fig. 1.

In ultimul caz, figura haşurată ne dă $A \cap CB$, care se mai poate scrie şi $A - AB$, adică evenimentele se pot deasemenea scădea.

---

[1]) Urmează că şi Φ aparţine lui F, deoarece $\Phi = CE$.

Din figură rezultă:

$$C E = \Phi \qquad C\Phi = E$$
$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$
$$A \cup (CA) = E \qquad A \cap (CA) = \Phi$$
$$A \cup \Phi = A \qquad A \cap E = A$$
$$A \cup E = E \qquad A \cap \Phi = \Phi$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

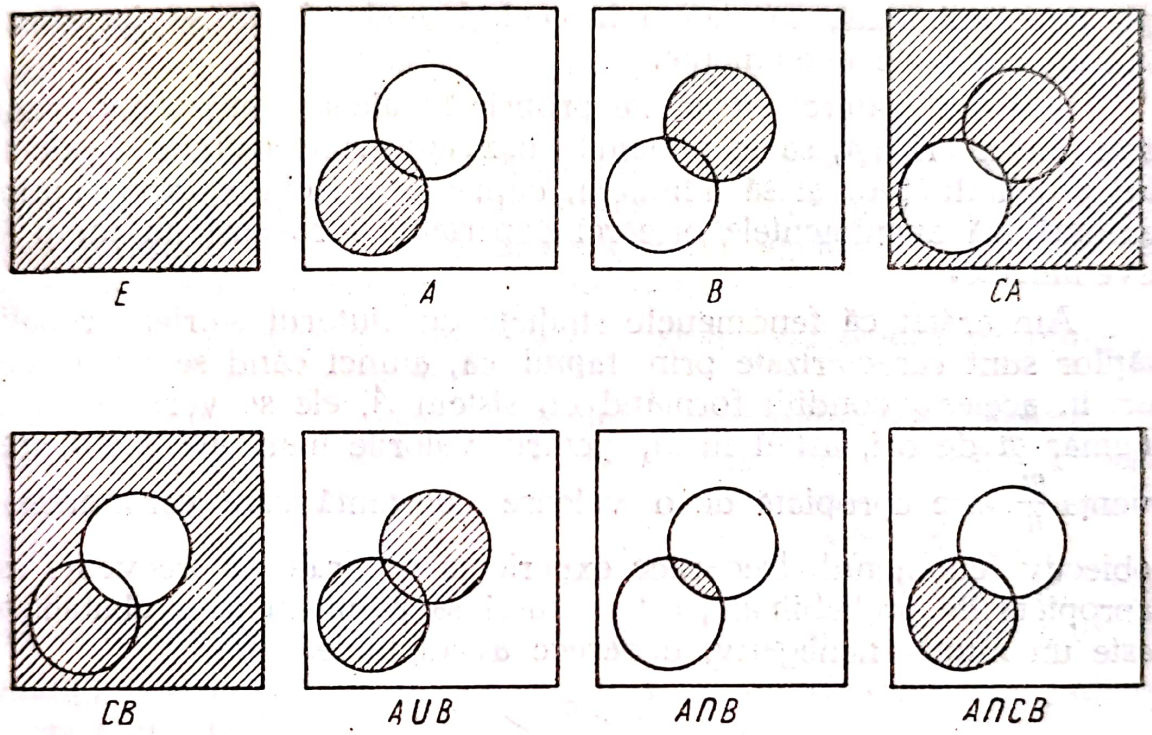

Fig. 1

Ultimele două relații ne arată că reuniunea și intersecția sunt operații comutative.

4. Schema lui Kolmogorov

Pe baza elementelor expuse până aici, putem să trecem la axiomatizarea teoriei probabilităților făcută de Kolmogorov.

Axiomele sunt următoarele:

I. Fie E o mulțime de elemente și F un câmp de evenimente corespunzător.

II. Fiecărui eveniment A al câmpului îi corespunde un număr real, nenegativ, $P(A)$, care se numește probabilitate.

Scanned with OKEN Scanner

III. $P(E)=1$.

IV. Dacă A şi B sunt evenimente incompatibile,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Evenimentele elementare se introduc conform definiţiei dela p. 20.

Alegerea acestor axiome rezultă din generalizarea experienţelor făcute cu fenomenele de masă.

La construcţia unui câmp de evenimente am ajuns în mod natural, folosind experienţa aruncării unui zar. Analizând numeroase exemple de evenimente, constatăm în acelaşi mod că ele se încadrează într'un câmp de evenimente.

Este deci natural ca aceste proprietăţi ale evenimentelor, rezultate din experienţă, să le punem la baza construirii teoretice a calculului probabilităţilor şi să admitem, cum a făcut Kolmogorov, ca primă axiomă, că evenimentele oricărei experienţe formează un câmp de evenimente.

Am arătat că fenomenele studiate cu ajutorul teoriei probalilităţilor sunt caracterizate prin faptul că, atunci când se repetă de n ori în aceleaşi condiţii formând un sistem A, ele se verifică de un număr m de ori, astfel încât, pentru valorile mari ale lui n, frecvenţa $\frac{m}{n}$ este apropiată de o valoare constantă care caracterizează obiectiv fenomenul. Deoarece experienţa ne arată că frecvenţa este apropiată de probabilitate, este natural să admitem că probabilitatea este un număr nenegativ, deoarece avem totdeauna:

$$0 \leq \frac{m}{n} \leq 1.$$

Pentru acelaşi motiv trebue să admitem că probabilitatea evenimentului sigur este 1.

Adunarea probabilităţilor pentru evenimentele incompatibile este un fapt constatat experimental de multă vreme. Ea stă la baza aplicaţiilor calculului probabilităţilor în diferitele ramuri ale ştiinţei sau practicii.

Fie, de exemplu, $q(x, x+1)$ probabilitatea ca un individ de vârstă x să moară la o vârstă cuprinsă între x şi $x+1$ ani, $q(x+1, x+2)$ probabilitatea ca el să moară între $x+1$ şi $x+2$ ani, iar $q(x, x+2)$ probabilitatea ca acelaşi individ să moară între x şi $x+2$ ani, avem:

$$q(x, x+2) = q(x, x+1) + q(x+1, x+2).$$

Fie p_A probabilitatea ca un obuz să cadă într'o regiune A şi p_B probabilitatea ca el să cadă într'o regiune B (A şi B fiind două

regiuni învecinate, dar fără niciun punct comun). Probabilitatea ca obuzul să cadă într'una dintre aceste regiuni este $p_A + p_B$.

Probabilităţile de mai sus şi-au găsit aplicaţie în asigurări şi balistică, relaţiile dintre ele fiind totdeauna confirmate de practică.

Dealtfel, această relaţie dintre probabilităţi este strâns legată de o proprietate corespunzătoare pentru frecvenţe. Dacă vom considera frecvenţele F_A, F_B, F_C, ... pentru categoriile A, B, C, ... care nu au între ele niciun element comun, este evident că frecvenţa corespunzătoare categoriei care le înglobează pe toate este $F_A + F_B + F_C + \ldots$

Considerând astfel exemplul al doilea, frecvenţa obuzelor căzute în regiunea $A+B$ este egală cu suma frecvenţelor obuzelor căzute în A şi B.

Cum pentru frecvenţe această egalitate este totdeauna îndeplinită, este clar că, dacă nu am admite şi pentru probabilităţi egalitatea corespunzătoare, nu ar putea subsista legătura confirmată de experienţă, între probabilitate şi frecvenţă.

Trebue observat că sistemul de axiome nu determină numeric probabilităţile evenimentelor.

In lucrarea sa „Bazele calculului probabilităţilor", apărută în 1931, Kolmogorov arată că probabilitatea $P(A)$ corespunzătoare evenimentului A, înafară de îndeplinirea axiomelor teoriei probabilităţilor, trebue să se bucure şi de următoarele proprietăţi:

1. Din punct de vedere practic, să fim siguri că, dacă fenomenul se desfăşoară de n ori în condiţii identice date de sistemul de condiţii A şi evenimentul A se verifică de m ori, frecvenţa $\frac{m}{n}$ diferă foarte puţin de $P(A)$.

2. Dacă $P(A)$ este foarte mic, să fim siguri că într'o singură experienţă evenimentul A nu se verifică.

Rolul raţionamentului şi al experienţei în construirea teoriei probabilităţilor este astfel acelaşi ca în toate ramurile ştiinţei matematice. Disciplinele matematicei (geometria, calculul probabilităţilor, mecanica, etc.), se desvoltă prin procedee abstracte, aplicate în mod deductiv asupra conceptelor teoretice formulate prin axiome. Aceste concepte au însă o semnificaţie fizică, dovedindu-se experimental că ele şi proprietăţile lor, stabilite pe cale deductivă, îşi găsesc o largă interpretare în lumea fizică. In modul acesta, matematica contribue efectiv la progresul ştiinţei şi al tehnicei.

Axiomele calculului probabilităţilor ne arată cum putem folosi definiţia clasică a probabilităţilor. In adevăr, alegerea unei probabilităţi $P(A)$, egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor posibile, *atunci când putem face discriminarea cazurilor egal posibile*, nu contrazice axiomele I–IV.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, din punct de vedere matematic, cu o astfel de probabilitate se poate lucra. Rămâne însă ca, de fiecare dată, să ne convingem că din punct de vedere practic sunt îndeplinite condiţiile de mai sus, care justifică aplicarea teoriei probabilităţilor în practică.

Din axiomele admise, rezultă anumite proprietăţi însemnate. Din axioma IV, dacă $A, B, C, \ldots$ sunt un număr finit de evenimente, obţinem:

$$P(A \cup B \cup C \cup \ldots \cup L) = P(A) + P(B) + \cdots + P(L);$$

în particular, dacă $A \cup B \cup \ldots \cup L = E$ rezultă:

$$P(A) + P(B) + \cdots + P(L) = P(E)$$

şi, ţinând seama de axioma III,

$$P(A) + P(B) + \cdots + P(L) = 1.$$

Dacă A este un eveniment, contrarul său este $\overline{A}$ şi avem $A \cup \overline{A} = E$. Pe de altă parte, A şi $\overline{A}$ sunt incompatibile. In baza relaţiei precedente, obţinem:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

Pentru $A = E$, ţinând seamă că $\overline{E} = \Phi$, obţinem:

$$P(\Phi) = 0,$$

deci probabilitatea evenimentului imposibil este zero.

PROBLEME

1. Fie A şi B două evenimente din acelaşi câmp; să se arate că:

$$C(A \cup B) = (CA) \cap (CB),$$

$$C(A \cap B) = (CA) \cup (CB).$$

2. Să se arate că relaţiile

$$A \subset B, \quad CA \supset CB, \quad A \cup B = B, \quad A \cap B = A$$

sunt echivalente.

3. Relaţiile

$$A \cap B = \Phi, \quad A \subset CB, \quad B \subset CA$$

sunt echivalente.

4. Relaţiile

$$A \cup B = E, \quad CA \subset B, \quad CB \subset A$$

sunt echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

5. Dacă A, B și C sunt evenimente din același câmp, avem

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C,$$

$$A \cup (B \cap C) = A \cup B) \cap (B \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

6. Relațiile $A \subset B$ implică relațiile

$$A \cup C \subset B \cup C,$$

$$A \cap C \subset B \cap C.$$

7. Fie M, N, P trei evenimente din același câmp; să se arate că:

$$C(M \cup N \cup P) = (CM) \cap (CN) \cap (CP),$$

$$[C(M \cup N)] \cap P = [(M \cap CP)] \cup [(CN \cap P)],$$

$$[C(M \cup N)] \cap P = (CM) \cap (CN) \cap P.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE

1. Definiții

Fie A și B două evenimente, astfel încât $P(A) > 0$. Raportul

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1}$$

poartă numele de *probabilitatea evenimentului B, condiționată de A.*

Cum $P(A \cap B) \geqq 0$, $P(A) > 0$, rezultă

$$P_A(B) \geqq 0. \tag{2}$$

Dacă facem $B = E$ și ținem seamă de faptul că $A \cap E = A$, obținem

$$P_A(E) = 1. \tag{3}$$

A, B și C fiind trei evenimente, se poate arăta ușor că

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Aplicând formula (1), obținem succesiv:

$$P_A(B \cup C) = \frac{P[A \cap (B \cup C)]}{P(A)} = \frac{P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C) \tag{4}$$

dacă B și C sunt incompatibile.

Formulele (2), (3), (4) ne arată că probabilitatea $P_A(B)$ îndeplinește axiomele II, III, IV pe care trebue să le îndeplinească o probabilitate $P(A)$.

Să considerăm, ca exemplu, extracțiile dintr'o urnă care conține a bile albe și b bile negre. Extracțiile se fac fără a pune bila scoasă înapoi în urnă.

Să facem două extracții din urnă și să notăm cu A evenimentul care constă în apariția unei bile albe în prima extracție și cu B evenimentul care constă în scoaterea unei bile negre în a doua extracție. Să calculăm probabilitatea evenimentului B.

Pentru aceasta, numărăm evenimentele posibile în primele două extracții. Să numerotăm bilele albe cu $1, 2, \ldots, a$. Vom avea a bile albe

$$A_1, A_2, \ldots, A_a.$$

Tot astfel, vom avea b bile negre

$$B_1, B_2, \ldots, B_b.$$

Numărul evenimentelor este egal cu numărul perechilor A_iA_j, A_iB_l, B_hA_j, B_iB_j, unde:

$$\begin{array}{llll} i=1, 2, \ldots, a; & j=1, 2, \ldots, b; & \\ h=1, 2, \ldots, a; & l=1, 2, \ldots, b; & \end{array} \quad i \neq j.$$

Numărul acestor perechi este deci $(a+b)(a+b-1)$.

Numărul cazurilor în care se verifică evenimentul A este dat de numărul perechilor

$$A\,A_j,\ A_hB_l.$$

Acest număr este egal cu

$$a(a-1)+ab=a(a+b-1).$$

Numărul cazurilor în care se verifică și A și B, adică după notația noastră $A \cap B$, este

$$A_iB_j,$$

număr care este egal cu ab.

Rezultă că

$$P(A)=\frac{a}{a+b};\quad P(A\cap B)=\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{b}{a+b-1}.$$

Acest lucru se poate constata și direct, deoarece, după ce am scos o bilă albă, au mai rămas în urnă $(a-1)$ bile albe și b bile negre.

2. Evenimente independente

Formula (1) se mai poate scrie

$$P(A)\,P_A(B) = P(A \cap B). \tag{5}$$

In mod analog, avem

$$P(B)\,P_B(A) = P(A \cap B). \tag{6}$$

Rezultă

$$P(A)\,P_A(B) = P(B)\,P_B(A). \tag{7}$$

Să presupunem că

$$P_A(B) = P(B). \tag{8}$$

Aceasta înseamnă că oricare ar fi realizarea lui A, probabilitatea ca evenimentul B să se verifice nu depinde de A. Evenimentul B este deci independent de A.

Din egalitatea (7) rezultă:

$$P_B(A) = P(A), \tag{9}$$

adică nici evenimentul A nu depinde de B.

In acest caz, spunem că evenimentele A și B sunt independente între ele.

Ținând seamă de (5) și (8), rezultă:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{10}$$

Să observăm că relația (10) este mai generală decât relațiile (8) și (9), deoarece ea poate fi scrisă și dacă $P(A)=0$, $P(B)=0$, în timp ce relațiile (8) și (9) nu au sens în acest caz. Pentru acest motiv, spunem că două evenimente A și B sunt *independente* dacă relația (10) este definită. Evident, dacă $P(A) \neq 0$, A și B sunt independente dacă și numai dacă $P_A(B) = P(B)$; în mod analog, dacă $P(B) \neq 0$, atunci A și B sunt independente dacă și numai dacă $P_B(A) = P(A)$.

La fel se definește independența evenimentelor $A_1, \ldots, A_n$ și anume: evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ sunt independente dacă pentru orice subșir $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})\,P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_r}).$$

Să observăm cu această ocazie că, pentru ca evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să fie independente, nu este suficient ca pentru orice $i \neq j$,

$$P(A_iA_j) = P(A_i)\,P(A_j),$$

adică nu este suficient ca evenimentele să fie independente două câte două. De exemplu, dacă evenimentul sigur este de forma

$$E = (e_1, e_2, e_3, e_4) \quad \text{și} \quad A = (e_1, e_2),\ B = (e_1, e_3)\ C = (e_1, e_4),$$

atunci

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

pe când

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Acest exemplu a fost dat de S. Bernștein.

Să luăm, de exemplu, aruncarea a două zaruri. Evenimentul A constă în apariția feței 6, la primul zar, și evenimentul B, în apariția feței 5, la zarul al doilea. Condiția (10) este îndeplinită, deoarece

$$P(A) = \frac{1}{6}; \quad P(B) = \frac{1}{6},$$

iar,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Evenimentele A și B sunt, deci, independente.

Aceasta se întâmplă în toate cazurile în care realizarea unuia dintre evenimente nu are nicio influență asupra celuilalt.

Extinderea acestor considerații nu prezintă nicio dificultate pentru cazul mai multor evenimente.

3. Regula lui Bayes

Regula lui Bayes poate avea o demonstrație simplă cu ajutorul probabilităților condiționate.

Demonstrația nu se deosebește esențial de cele date mai înainte, dar prezintă avantajul că arată cum se încadrează regula lui Bayes în teoria generală a calculului probabilităților.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm n evenimente incompatibile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pentru care avem

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E,$$

unde E este evenimentul total.

X fiind un eveniment oarecare din câmpul de evenimente considerat, avem

$$P(X) = P(A_1) P_{A_1}(X) + P(A_2) P_{A_2}(X) + \cdots + P(A_n) P_{A_n}(X).$$

In adevăr, avem

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup \ldots \cup (A_n \cap X),$$

ceeace se poate uşor constata.

Prin urmare

$$P(X) = P(A_1 \cap X) + P(A_2 \cap X) + \cdots + P(A_n \cap X).$$

Insă

$$P(A_k \cap X) = P(A_1) P_{A_k}(X).$$

Rezultă, prin urmare, formula de mai sus.

Am demonstrat însă că:

$$P_X(A_i) P(X) = P(A_i) P_{A_i}(X) = P(A_i \cap X),$$

deci:

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i) P_{A_i}(X)}{P(X)}$$

sau:

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i) P_{A_i}(X)}{P(A_1) P_{A_1}(X) + P(A_2) P_{A_2}(X) + \cdots + P(A_n) P_{A_n}(X)}.$$

Această formulă reprezintă regula lui Bayes, de care ne vom ocupa mai amănunţit în Cap. IV, însă scrisă cu alte notaţii.

PROBLEME

1. Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea ca suma feţelor lor să fie 6, ştiind că suma acestor feţe a dat un număr cu soţ?

2. Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea ca suma feţelor să dea un număr divizibil prin 3, ştiind că primul zar a dat un număr cu soţ?

Scanned with OKEN Scanner

3. Dintr'o urnă conținând a bile albe și b bile negre se fac extracții, punându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Să se determine probabilitatea de a obține din patru extracții consecutive două bile albe, știind că la extracția a doua a ieșit o bilă albă.

4. Să se rezolve problema de mai sus, în cazul în care bila extrasă se pune înapoi în urnă.

5. Dacă evenimentele A și B sunt independente și evenimentele A, CB; CA, B; CA, CB sunt independente două câte două.

6. Să se demonstreze egalitatea

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

PROBLEME CLASICE DIN TEORIA PROBABILITĂȚILOR

1. Schema lui Bernoulli

Să presupunem că se execută un număr mare de operații sau experiențe, în aceleași condiții, și că fiecare operație poate conduce la unul dintre evenimentele:

$$E_1, E_2, \ldots, E_m$$

incompatibile între ele. Aceasta înseamnă că, dacă vom nota cu p_i probabilitatea evenimentului $E_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$, vom avea

$$p_1+p_2+\cdots+p_m=1.$$

Ne propunem să calculăm probabilitatea $P^{(n_1 n_2, \ldots, n_m)}$ ca, în n experiențe, evenimentul E_1 să se întâmple de n_1 ori, E_2 de n_2 ori, ..., E_m de n_m ori, unde

$$n_1+n_2+\cdots+n_m=n.$$

De exemplu, un magazin vinde în cursul unei săptămâni 2 600 bucăți dintr'o anumită marfă primită dela fabricele A, B, C, în următoarele cantități:

Dela fabrica	A . . .	3 000 bucăți
» »	B . . .	2 600 bucăți
» »	C . . .	4 200 bucăți
		9 800 bucăți

Marfa fiind de aceeași calitate, să se determine probabilitatea ca 820 bucăți din marfa vândută să fie dela fabrica A, 500 bucăți dela fabrica B și restul de 1 280 bucăți dela fabrica C.

In această problemă există evenimentul E_1 de a vinde marfa procurată dela fabrica A, evenimentul E_2 de a vinde marfa dela fabrica B și E_3 de a vinde marfa dela fabrica C.

Aceste evenimente sunt incompatibile între ele, admițând că cele 9 800 bucăți sunt amestecate și clienții nu manifestă nicio preferință.

Avem probabilitățile: $P_1 = \frac{3\,000}{9\,800} = \frac{15}{49}$;

$$P_2 = \frac{2\,600}{9\,800} = \frac{13}{49};$$

$$P_3 = \frac{4\,200}{9\,800} = \frac{21}{49}.$$

Cum $m=3$; $n_1=820$; $n_2=500$ și $n_3=1.280$, urmează să calculăm probabilitatea $P^{(820,\ 500,\ 1\,280)}$.

Pentru aceasta, vom presupune la început că evenimentele E_1, E_2, E_3 se prezintă într'o ordine anumită; în acest caz, probabilitatea ca să se vândă 820 bucăți dela fabrica A, 500 bucăți dela fabrica B și 1 280 dela fabrica C, în baza teoremei probabilităților compuse, va fi (evenimentele E_1, E_2, E_3 sunt independente între ele):

$$P^{(820,\ 500,\ 1\,280)} = p_1^{820} \cdot p_2^{500} \cdot p_3^{1\,280} = \left(\frac{15}{49}\right)^{820} \cdot \left(\frac{13}{49}\right)^{500} \cdot \left(\frac{21}{49}\right)^{1\,280}.$$

Dacă însă ordinea vânzărilor este indiferentă, trebue să însumăm un număr de produse $p^{(820,\ 500,\ 1\,280)}$, egal cu numărul modurilor în care s'ar putea vinde cele 2 600 de bucăți, astfel încât să avem totdeauna 820 dela fabrica A, 500 dela fabrica B și 1 280 dela fabrica C. Acest număr este însă egal cu numărul permutărilor grupate (cu repetiție) a 2 600 elemente, dintre care 820, respectiv 500 și 1 280, sunt egale între ele. Notând acest număr prin $\pi_{2\,600}^{(820,\ 500,\ 1\,280)}$, avem formula cunoscută din algebră

$$\pi_{2\,600}^{(820,\ 500,\ 1\,280)} = \frac{2\,600!}{820!\ 500!\ 1\,280!};$$

prin urmare, probabilitatea căutată va fi

$$P^{(820,\ 500,\ 1\,280)} = \frac{2\,600!}{820!\ 500!\ 1\,280!} \left(\frac{15}{49}\right)^{820} \left(\frac{13}{49}\right)^{500} \left(\frac{21}{49}\right)^{1\,280}.$$

Formula generală se stabilește în mod asemănător. Vom avea probabilitatea

$$P^{(n_1, n_2, \ldots, n_m)} = \pi_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_m)} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}, \qquad (1)$$

unde $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$, sau înlocuind:

$$\pi_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_m)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!}$$

obținem

$$P^{(n_1, n_2, \ldots, n_m)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}. \qquad (2)$$

In cazul particular $m=2$, obținem rezultatul următor:

Probabilitatea ca, în n experiențe, evenimentul E să se întâmple de k ori și contrariul său $\bar{E}$ de $n-k$ ori, este egală cu

$$P^{(n,\, n-k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k}, \qquad (3)$$

unde p și q sunt, respectiv, probabilitățile evenimentelor E și $\bar{E}$, iar $p+q=1$.

Aplicația 1. Se aruncă de 8 ori o monetă. Se cere probabilitatea de a obține stema de 4 ori.

Aplicând formula (3), în care $n=8, k=4$ și $p=\ q=\frac{1}{2}$, obținem:

$$p^{(4,4)} = \frac{8!}{4!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}.$$

Aplicația 2. Se aruncă de 12 ori un zar. Să se calculeze probabilitatea de a obține de două ori fiecare dintre cele șase fețe.

Aplicăm formula (2), în care punem:

$$m=12;\ n_1=n_2=\cdots=n_6=2.$$

$$p_1=p_2\cdots=p_6=\frac{1}{6},$$

deci

$$P^{(2,2\ldots,2)} = \frac{12!}{2!\,2!\ldots 2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdots\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{12!}{2^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{12} = \frac{1\,925}{559\,872}.$$

Observație. Problemele care se rezolvă cu ajutorul formulei (2) corespund următoarei scheme generale:

O urnă conține bile de diferite culori, în proporții date. Se cere probabilitatea ca din n bile extrase, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă, să obținem n_1 bile de o culoare, n_2 bile de altă culoare, etc. Această schemă constituie așa numita urnă a lui Bernoulli. Probabilitățile $p_1, p_2, \ldots$ rămân mereu aceleași.

Scanned with OKEN Scanner

2. Schema lui Poisson

Să considerăm două evenimente: A şi contrarul său $\bar{A}$. Fie p_1, $p_2, \cdots, p_n$ probabilităţile evenimentului A în n experienţe şi $q_1, q_2, \ldots, q_n$ probabilităţile evenimentului $\bar{A}$ în aceleaşi experienţe. Evident $q_i = 1 - p_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,

Să calculăm probabilitatea că în cele n experienţe evenimentul A să se întâmple de k ori şi $\bar{A}$ de $n-k$ ori.

Notăm cu $i_1, i_2 \ldots, i_k$ o combinaţie de câte k numere din şirul 1, 2, 3, $\ldots, n$ şi cu $i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n$ o combinaţie a celorlalte $n-k$ numere; aplicând teoremele de adunare şi de înmulţire a probabilităţilor, obţinem:

$$P = \sum p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k} q_{i_{k+1}} q_{i_{k+2}} \cdots q_{i_n}. \qquad (4)$$

Toţi termenii care intră în suma din partea a doua sunt diferitele produse parţiale ale desvoltării

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \cdots (p_n + q_n) = 1,$$

şi anume sunt acei termeni care conţin k factori p şi $n-k$ factori q.

Dacă, deci, vom considera produsul

$$(p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2) \cdots (p_n t + q_n),$$

probabilitatea P este tocmai coeficientul lui t^k din desvoltarea acestui produs.

Problemele care se rezolvă cu formula (4) intră în următoarea schemă generală, numită schema lui Poisson.

Se dau n urne $U_1, U_2, \cdots, U_n$, care conţin bile albe şi negre în proporţii date. Din fiecare urnă se extrage o bilă la întâmplare. Se cere probabibilitatea de a extrage k bile albe şi $n-k$ bile negre. Dacă de exemplu, urnele U_1, U_2, U_3 au următoarele compoziţii:

$$U_1\begin{pmatrix}2a\\3n\end{pmatrix}, \quad U_2\begin{pmatrix}3a\\2n\end{pmatrix}, \quad U_3\begin{pmatrix}2a\\2n\end{pmatrix},$$

probabilitatea de a obţine, în cele trei extracţii, o singură bilă albă (deci două negre) este coeficientul lui t din produsul

$$\left(\frac{2}{5}t + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}t + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest coeficient fiind egal cu

$$\frac{4}{50}+\frac{9}{50}+\frac{6}{50}$$

rezultă

$$P=\frac{19}{50}.$$

Dacă se cere, de exemplu, probabilitatea să nu iasă nicio bilă albă, vom calcula termenul liber al produsului, care are valoarea $\frac{6}{50}$.

3. Schema bilei neîntoarse

Să considerăm o urnă conținând A bile albe și N bile negre. Din această urnă se fac n extracții succesive, fără să se pună bilele înapoi. Se cere să se calculeze probabilitatea ca, din cele n bile extrase, α să fie albe și β negre.

Această problemă prezintă interes pentru statistica matematică, și anume constitue schema probabilistică în problema selecțiunii. Astfel, să presupunem că vrem să stabilim frecvența unei caracteristice pentru o populație de N indivizi și că nu avem posibilitatea să constatăm existența sau lipsa acestei caracteristice decât la un număr $n\,(n<N)$ de indivizi, luați la întâmplare. Pornind dela acest rezultat parțial, se pune întrebarea: ce concluzii putem trage pentru întreaga colectivitate, adică pentru populația formată din N indivizi? Redusă la schema cea mai simplă, această metodă de cercetare, asupra căreia vom reveni, dă naștere la problema de mai sus.

Pentru rezolvarea problemei, numărăm cazurile posibile și cazurile favorabile.

Numărul cazurilor posibile este dat de numărul de combinări făcute cu numărul total de bile din urnă, luate în raport cu numărul bilelor extrase, adică:

$$C_{A+N}^{n}=C_{A+N}^{\alpha+\beta}.$$

Să numărăm acum câte grupuri de câte α bile albe și β bile negre putem forma $(\alpha+\beta=n)$. Este evident că cu cele A bile albe putem forma C_A^α grupuri de câte α bile albe. La fiecare dintre aceste grupuri putem asocia C_N^β bile negre, formate cu cele N bile negre câte sunt în urnă, luate câte β. Deci numărul cazurilor favorabile este $C_A^\alpha \cdot C_N^\beta$.

Prin urmare, probabilitatea căutată este dată de relația

$$P=\frac{C_A^\alpha \cdot C_N^\beta}{C_{A+N}^{\alpha+\beta}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe aceeaşi cale se rezolvă următoarea problemă, mai generală: într'o urnă se găsesc N bile de k culori, şi anume N_1 bile de culoarea întâi, N_2 bile de culoarea a doua, etc. ($N_1+N_2+\cdots+N_k=N$). Se fac n extracţii succesive fără să se pună bila extrasă înapoi în urnă. Care este probabilitatea să avem n_1, $n_2,\ldots,n_k$ bile de culorile respective?

Raţionând în acelaşi mod, ajungem la rezultatul

$$P=\frac{C_{N_1}^{n_1}\,C_{N_2}^{n_2}\cdots C_{N_k}^{n_k}}{C_{N_1+N_2+\cdots N_k}^{n_1+n_2+\cdots n_k}}.$$

4. Adunarea probabilităţilor în cazul evenimentelor compatibile

In unele probleme de ordin teoretic şi practic este necesar să se calculeze probabilitatea unor evenimente care se pot întâmpla în acelaşi timp (evenimente compatibile). Să vedem cum se modifică în acest caz teorema adunării probabilităţilor, pe care am studiat-o presupunând evenimentele incompatibile între ele. Să luăm un exemplu simplu. Se ştie că lămpile cu incandescenţă se construesc pentru o viaţă medie de un anumit număr de ore şi să considerăm o uzină la care defectele de fabricaţie ale lămpilor reprezintă $2^0/_0$ şi defectele de montaj $5^0/_0$. Să calculăm probabilitatea eliminărilor, adică probabilitatea ca o lampă să fie înlăturată ca necorespunzătoare.

In această problemă se prezintă două evenimente: E_1, ca o lampă să aibă defect de fabricaţie şi E_2, ca ea să aibă defect de montaj. Aceste evenimente nu mai sunt incompatibile între ele, deoarece vor fi şi lămpi care au ambele defecte.

Notăm cu p_1 probabilitatea ca evenimentul E_1 să se întâmple singur sau împreună cu E_2; cu p_2, aceeaşi probabilitate pentru evenimentul E_2 şi cu p_{12} probabilitatea ca E_1 şi E_2 să se verifice împreună. Să admitem că avem valorile

$$p_1=0{,}02\,;\quad p_2=0{,}05\,;\quad p_{12}=0{,}02\cdot 0{,}05=0{,}001.$$

Ţinând seama că o lampă este trecută la rebut dacă posedă cel puţin unul dintre cele două defecte, pentru determinarea probabilităţii căutate trebue să considerăm şi probabilitatea p_1' de a se întâmpla numai E_1, precum şi probabilitatea p_2' de a întâmpla numai E_2.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece evenimentele E_1 (fără E_2), E_2 (fără E_1) și $E_1 E_2$ împreună sunt incompatibile între ele, aceste probabilități, — în baza proprietății de adunare a probabilităților — sunt date de relațiile

$$p_1 = p_1' + p_{12},$$

$$p_2 = p_2' + p_{12},$$

iar probabilitatea căutată ca o lampă să fie rebutată este

$$P = p_1' + p_2' + p_{12}.$$

Din relațiile de mai sus deducem

$$p_1' + p_2' = p_1 + p_2 - 2p_{12};$$

deci:

$$P = p_1 + p_2 - p_{12}. \qquad (5)$$

astfel încât valoarea probabilității căutate va fi

$$P = 0{,}02 + 0{,}05 - 0{,}001 = 6{,}9\%.$$

Acum putem pune problema generală, și anume să calculăm probabilitatea să se întâmple cel puțin unul dintre evenimentele compatibile între ele $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Am văzut, mai înainte, că probabilitatea căutată pentru cele două evenimente E_1 și E_2 era

$$P = p_1 + p_2 - p_{12}.$$

Să trecem acum la trei evenimente, descompunând evenimentul E_2 în două evenimente compatibile între ele, pe care le notăm E_0 și E_3. Aplicând relația (5) obținem

$$p_2 = p_0 + p_3 - p_{03},$$

$$p_{12} = p_{10} + p_{13} - p_{103},$$

unde p_{103} este probabilitatea ca E_1, E_0 și E_3 să se verifice împreună. Substituind aceste valori în (5), obținem

$$P = p_1 + p_0 + p_3 - p_{10} - p_{13} - p_{03} + p_{103}.$$

Schimbând, pentru uniformitatea scrisului, 0 cu 2, obținem probabilitatea

$$P = p_1 + p_2 + p_3 - (p_{12} + p_{13} + p_{23}) + p_{123}$$

Scanned with OKEN Scanner

ca să se întâmple cel puțin unul dintre cele trei evenimente E_1, E_2, E_3.

Acest procedeu de inducție poate fi generalizat și duce la probabilitatea

$$P = \sum_i p_i - \sum_{ij} p_{ij} + \sum_{ijk} p_{ijk} - \cdots \tag{7}$$

Insumarea se referă la valorile 1, 2, 3, ..., n ale indicelui, sau la combinațiile acestor valori două câte două, trei câte trei, etc., cu condiția ca diferiții indici ai aceleiași litere să fie toți diferiți între ei.

In cazul particular în care evenimentele E_1, E_2, ..., E_n sunt incompatibile între ele, avem:

$$p_{ij} = p_{ijk} = \cdots = 0,$$

de unde rezultă probabilitatea

$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

de adunare a probabilităților în cazul evenimentelor incompatibile între ele.

Să verificăm formula (5) prin următorul exemplu:

Se consideră n urne U_1, U_2, ..., U_n și fie p_1, p_2, ..., p_n probabilitățile respective de a extrage o bilă albă din fiecare urnă. Notând prin q_1, q_2, ..., q_n probabilitățile contrare (adică extracția unei bile de altă culoare decât albă), avem

$$P = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n = 1 - (1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$$

deoarece evenimentele E_1, E_2, ..., E_n de a extrage o bilă albă din prima, a doua, ..., a n-a urnă sunt independente între ele.

Să aplicăm acum formula (7) în care, în virtutea teoremei de înmulțire a probabilităților, avem:

$$p_{12} = p_1 p_2, \ldots, p_{123} = p_1 p_2 p_3, \ldots$$

și obținem:

$$P' = \sum_i p_i - \sum_{ij} p_i p_j + \sum_{ijk} p_i p_j p_k - \cdots$$

Pe de altă parte din desvoltarea produsului

$$\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = 1 - \sum_i p_i + \sum_{ij} p_i p_j - \cdots$$

rezultă egalitatea

$$1 - (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n) = \sum_i p_i - \sum_{ij} p_i p_j + \sum_{ijk} p_i p_j p_k - \cdots$$

Prin urmare $P = P'$.

Scanned with OKEN Scanner

Reproducem, mai departe, unele formule utile privind probabilitățile evenimentelor compatibile $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Notând, ca mai sus, cu p_i probabilitatea de a se verifica evenimentul $E_i (i=1, 2, \ldots, n)$ singur sau împreună cu altele, cu p_{ij} probabilitatea de a se verifica evenimentele E_i și E_j singure sau împreună cu altele, etc., probabilitatea de a se verifica, de exemplu, numai E_1, este

$$p_1' = p_1 - \sum_i p_{1i} + \sum_{ij} p_{1ij} - \cdots \tag{8}$$

iar probabilitatea de a se verifica numai E_1 și E_2 împreună este

$$p_{12}' = p_{12} - \sum_i p_{12i} + \sum_{ij} p_{12ij} - \cdots \tag{9}$$

Probabilitatea ca unul singur, indiferent care dintre cele n evenimente, să se verifice este

$$P^{(1)} = \sum_i p_i - 2\sum_{ij} p_{ij} + 3\sum_{ijk} p_{ijk} \cdots \tag{10}$$

iar probabilitatea ca numai două dintre cele n evenimente să se verifice împreună, este:

$$P^{(2)} = \sum_{ij} p_{ij} - C_3^2 \sum_{ijk} p_{ijk} + C_4^2 \sum_{ijkl} p_{ijkl} - \cdots \tag{11}$$

Deoarece evenimentele ale căror probabilități sunt $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}$ sunt incompatibile, rezultă în baza teoremei de adunare a probabilităților

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + \ldots + P^{(n)}.$$

In același fel calculăm probabilitatea ca cel puțin r dintre aceste evenimente să se verifice.

Notând cu P_r această probabilitate și folosind observația de mai sus, obținem

$$P_r = P^{(r)} + P^{(r+1)} + \ldots + P^{(n)}. \tag{12}$$

Pentru simplificare, notăm

$$T_1 = \sum_i p_i, \quad T_2 = \sum_{ij} p_{ij}, \quad T_3 = \sum_{ijk} p_{ijk}.$$

Inlocuind în relația (12) probabilitățile $P^{(s)}$ prin valorile lor (care am văzut cum se calculează), ajungem la formula

$$P_r = T_r - C_r^1 T_{r+1} + \cdots + (-1)^s C_{r+s-1}^s T_{r+s} + \cdots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} T_n. \tag{13}$$

5. Problema concordanțelor

Se rezolvăm, ca aplicație a acestor formule, următoarea problemă numită *problema concordanțelor*.

O urnă conține n bile numerotate 1, 2, 3, ..., n. Se fac extracții succesive, fără a pune bilele înapoi în urnă.

Să calculăm probabilitatea ca să obținem cel puțin o concordanță, adică cel puțin odată, la o bilă, rangul extracției să fie egal cu numărul marcat pe bilă.

Notăm cu p_i probabilitatea ca la extracția de rang i să iasă bila numerotată i ($i=1, 2, \ldots, n$); cu p_{ij}, probabilitatea ca la extracțiile de rang i și j să iasă bilele numerotate i și j, etc. Aici, probabilitatea ca să obținem cel puțin o concordanță este dată de formula (7), în care trebue să determinăm probabilitățile $p_i, p_{ij}, \ldots$

Pentru calculul probabilității p_i, ținem seama că cele n bile dau naștere la $P_n=n!$ permutări, care sunt cazurile posibile; cazurile favorabile evenimentului E_i, adică bila marcată i să se găsească pe locul i în aceste permutări, sunt în număr de

$$P_{n-1}=(n-1)!$$

de unde rezultă

$$p_i=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},$$

deci $p_1=p_2=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$.

In mod analog, obținem

$$p_{12}=p_{13}=\cdots p_{n-1,n}=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{(n-1)n},$$

$$p_{123}=\cdots=p_{n-2,n-1,n}=\frac{1}{(n-2)(n-1)n}, \text{ etc.}$$

Inlocuind aceste valori în formula (7), obținem

$$P=1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{1,2,3,\ldots,n},$$

adică probabilitatea de a obține cel puțin o concordanță.

Probabilitatea de a nu obține nici o concordanță, este:

$$Q=1-P=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots$$

Se vede că, atunci când n crește nemărginit, Q tinde către $\frac{1}{e}$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Aplicații la studiul probabilităților de viață

Să considerăm un grup format din n indivizi de vârste x_1, x_2, ..., x_n și să notăm respectiv cu E_1, E_2, ..., E_n evenimentele ca fiecare dintre acești indivizi să fie în viață peste un an. Evenimentele E_1, E_2, ..., E_n sunt compatibile între ele, deoarece pot avea loc în același timp. Pe de altă parte, aceste evenimente sunt și independente între ele. Dacă notăm cu p_i probabilitatea ca să se verifice evenimentul E_i, rezultă că probabilitatea $P_{ijk\ldots l}$, ca să se verifice împreună evenimentele E_i, E_j, ..., E_l, este dată de relația

$$P_{ijk\ldots l} = P_i P_j P_k \ldots P_l .$$

Aplicând una dintre formulele stabilite mai sus, rezultă că probabilitatea ca cel puțin unul dintre acești indivizi să fie în viață peste un an este egală cu:

$$\sum_i p_i - \sum_{ij} p_i p_j + \sum p_i p_j p_k + \cdots + (-1)^n p_1 p_2 \ldots p_n .$$

Folosind notația:

$$\sum_i p_i = T_1,$$

$$\sum_{ij} p_i p_j = T_2,$$

$$\sum_{ijk} p_i p_j p_k = T_3 .$$

. . . . . .

formula de mai sus se poate scrie

$$T_1 - T_2 + T_3 - \cdots + (-1)^n T_n .$$

Acum putem stabili ușor și probabilitatea ca cel puțin r persoane să fie în viață peste un an. In adevăr, folosind relația (13), probabilitatea căutată este

$$T_r - C_r^1 T_{r+1} + \cdots + (-1)^s C_{r+s-1}^s T_{r+s} + \cdots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} T_n .$$

Pentru determinarea probabilității de mai sus vom expune încă o metodă, care este folositoare fiind aplicabilă și în cazul general al evenimentelor compatibile.

Scanned with OKEN Scanner

7. Metoda coeficienților nedeterminați

Pentru determinarea formulelor de mai sus este util să folosim o metodă care își găsește aplicații frecvente în teoria asigurărilor pe mai multe capete. Să notăm

$$P_r = a_r T_r + a_{r+1} T_{r+1} + \cdots + a_{r+s} T_{r+s} + \cdots + a_m T_m.$$

Observăm că modul de calcul al constantelor a_{r+s} este independent de valorile probabilităților p_i. Pe baza acestei observații, să dăm probabilităților p_i următoarele valori:

$$p_1 = p_2 = \cdots = p^r = 1,$$

$$p_{r+1} = p_{r+2} = \cdots = p_m = 0.$$

Evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_r$ se verifică în acest caz, în mod cert, pe când restul evenimentelor $E_{r+1}, E_{r+2}, \ldots, E_n$ nu se vor verifica, deoarece, dintre cele m evenimente considerate, suntem siguri că se vor verifica r.

Pe de altă parte, în baza valorilor alese pentru p_i, rezultă

$$T_r = 1, \quad T_{r+1} = T_{r+2} = \cdots = T_m = 0.$$

Obținem astfel egalitatea

$$a_r = 1.$$

Dacă pornim dela valorile

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{r+1} = 1,$$

$$p_{r+2} + p_{r+3} + p_m = 0,$$

rezultă, pe aceeași cale, relația

$$C^1_{r+1} a_r + a_{r+1} = 1.$$

In general, dacă

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_r = p_{r+1} = \cdots = p_{r+k} = 1,$$

$$p_{r+k+1} = p_{r+k+2} = \cdots = p_m = 0,$$

obținem egalitatea

$$C^r_{r+k} a_r + C^{r+1}_{r+k} a_{r+1} + \cdots + C^{r+k}_{r+k} a_{r+k} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile $a_r, a_{r+1}, \ldots, a_m$ sunt deci soluțiile următorului sistem de ecuații:

$$a_r = 1$$

$$C_{r+1}^1 a_r + a_{r+1} = 1$$

$$C_{r+2}^2 a_r + C_{r+2}^1 a_{r+1} + a_{r+2} = 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_m^{m-r} a_r + C_m^{m-r-1} a_{r+1} + C_m^{m-r-2} a_{r+2} + \cdots + a_m = 1,$$

a cărui rezolvare ne dă

$$a_{r+s} = (-1)^s C_{r+s-1}^s,$$

adică aceleași valori ca mai sus.

Sub o formă simbolică, probabilitatea P se poate scrie

$$P = \frac{T^r}{(1+T)^r}$$

și, rezolvând după puterile lui T, obținem:

$$P = T^r - C_r^1 T^{r+1} + C_{r+1}^2 \cdot T^{r+2} + \cdots + (-1)^s C_{r+s-1}^s \cdot T^{r+s} + \ldots$$

Dacă ne limităm la puterile lui T mai mici decât $m+1$ și înlocuim pe T^s prin T_s, obținem formula căutată.

8. Teorema de înmulțire a probabilităților. Inegalitatea lui Boole

Să vedem ce devine teorema de înmulțire a probabilităților în cazul evenimentelor dependente.

Problema generală se pune în modul următor:

Fie $E_1, E_2, \ldots, E_n$, n evenimente și $p_1, p_2, \ldots, p_n$ probabilitățile lor de a se verifica, singure sau împreună cu altele. Să se determine probabilitatea $p_{12\ldots n}$ ca cele n evenimente să se verifice împreună.

Dacă evenimentele sunt independente, putem determina probabilitatea $p_{12\ldots n}$ cu formula cunoscută

$$p_{12\ldots n} = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

In general, când nu avem alte indicații asupra evenimentelor E_i, probabilitatea căutată nu se poate determina printr'o formulă generală. Este însă totdeauna posibil să determinăm o limită inferioară a probabilității $p_{12\ldots n}$.

Pentru calculul limitei de mai sus, procedăm prin inducție. Considerăm evenimentele E_1 și E_2 și aplicăm formula (5):

$$P=p_1+p_2-p_{12},$$

unde presupunem p_1, p_2 și P cunoscute, iar p_{12}, necunoscută.

Deoarece $0 \leqslant P \leqslant 1$, putem scrie

$$p_{12} \geqslant p_1+p_2-1.$$

Considerăm acum și evenimentul E_3 cu probabilitatea p_3.

Notând cu p_{123} probabilitatea de a se verifica E_1, E_2 și E_3 împreună, avem, în mod analog

$$p_{123} \geqslant p_3+p_{12}-1,$$

de unde, prin adunare parte cu parte, obținem

$$p_{123} \geqslant p_1+p_2+p_3-2$$

și, în general, vom avea

$$p_{123\ldots n} \geqslant p_1+p_2+\cdots+p_n-(n-1). \qquad (14)$$

Această inegalitate se numește inegalitatea lui Boole. Ea are importante aplicații în statistică și în științele experimentale. Ca exemplu, vom trata următoarea problemă:

Pentru ca o piesă oarecare să corespundă standardului stabilit, ea trebue să îndeplinească condițiile A, B, C. Dintr'o statistică întocmită în acest scop asupra a 1 000 piese, rezultă că $92^0/_0$ dintre ele îndeplinesc condiția A; $85^0/_0$ condiția B și $89^0/_0$, condiția C. Se cere probabilitatea ca o piesă să îndeplinească toate cele trei condiții.

Aplicând inegalitatea lui Boole, obținem

$$P_{ABC} \geqslant 0{,}92+0{,}85+0{,}89-2=0{,}66,$$

deci probabilitatea ca o piesă să corespundă condițiilor standardului este cuprinsă între 0,66 și 1.

Formula (14) se aplică, îndeosebi, când probabilitățile p_i sunt foarte puțin diferite de 1.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm $p_i = 1 - q_i$, inegalitatea (14) se poate scrie sub forma

$$p_1 p_2 \dots p_n \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Dacă admitem că seria $\sum q_i$ este convergentă, putem extinde inegalitatea lui Boole la o succesiune nelimitată de evenimente și obținem

$$p = \lim_{n \to \infty} p_{12 \dots n} \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} q_i. \tag{15}$$

Observații. Formulele referitoare la evenimentele compatibile pot fi scrise sub altă formă.

De exemplu, formula (5) poate fi scrisă

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Formula (6) este echivalentă cu

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) +$$
$$+ P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

Această notație este mai complicată, dar are avantajul de a cuprinde formulele pe care le-am stabilit în teoria generală a evenimentelor.

PROBLEME

1. Într'o urnă sunt 25 bile, dintre care 14 albe și restul negre. Se extrag dintrodată două bile ; să se calculeze probabilitatea ca ele să fie de culori diferite. Să se generalizeze pentru compoziția (a, n) a urnei.

2. Într'o cutie de chibrituri conținând 41 bețe, 3 sunt fără gămălie. Scoțând 16 bețe la întâmplare, să se determine probabilitatea ca printre acestea să se găsească cele 3 bețe defecte.

3. Se aruncă două zaruri de 15 ori. Să se calculeze probabilitatea ca dubla 6 să apară cel puțin odată.

4. In condițiile problemei precedente, să se determine probabilitatea ca dubla 6 să iasă cel puțin de două ori.

5. Din urna considerată în problema 1 se extrag succesiv 4 bile, fără a pune bila înapoi în urnă după fiecare extracție. Să se calculeze probabilitatea ca toate bilele extrase să fie albe.

6. Se aruncă 3 zaruri. Să se calculeze probabilitatea ca suma punctelor obținute să fie

a) mai mică decât 8,

b) mai mare decât 7,

c) egală cu 12.

Scanned with OKEN Scanner

7. Aruncând 3 zaruri, suma 10 apare mai des decât 9. Să se determine probabilitățile respective ale acestor evenimente.

8. O urnă conține 12 bile numerotate dela 1 la 12. Să se determine probabilitatea ca bilele numerotate 5, 7, 11 să iasă la extracțiile de rangul 5, 7 și 11.

9 In problema precedentă, să se calculeze probabilitatea ca cel puțin două dintre bilele numerotate 5, 7, 11 să iasă la extracțiile respective.

10. La o loterie sunt 96 bilete, dintre care 8 câștigătoare. O persoană cumpără 12 bilete. Să se determine probabilitatea ca

a) un bilet și numai unul să fie câștigător;

b) cel puțin 3 bilete să fie câștigătoare;

c) să iasă cele 8 bilete câștigătoare;

d) să nu iasă nici un bilet câștigător.

11. Persoana A aruncă 2 zaruri, iar B, 3 zaruri.

Să se calculeze probabilitățile următoarelor evenimente:

a) A să obțină mai multe puncte decât B într'o singură probă.

b) A să obțină mai multe puncte decât B în două probe consecutive.

12. Intr'o ladă cu 80 pachete de țigări, 4 pachete au câte o țigară ruptă. Care este probabilitatea ca o persoană care cumpără 4 pachete să primească toate pachetele cu țigări rupte. Dar să primească cel puțin două pachete cu țigări rupte?

13. Un țintaș nimerește ținta de 7 ori din 9 trageri. Să se calculeze probabilitatea ca el să nimerească ținta de 8 ori consecutiv.

14. Trăgătorul A nimerește ținta de 8 ori din 11 trageri, iar B de 9 ori din 10. Dacă trag simultan în aceeași țintă, care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă?

15. O urnă conține 8 bile albe și 8 negre. Să se determine probabilitatea ca extrăgând 5 bile, fără a pune bila înapoi, să obținem

a) 5 bile albe;

b) 1 bilă neagră la extracția a treia,

c) 3 bile albe și 2 negre.

16. Două urne identic construite conțin: una 30 bile, dintre care 18 albe, iar cealaltă 21, dintre care 7 albe. Se extrage o bilă la întâmplare din una dintre urne. Să se determine probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.

17. Se aruncă o monetă de 10 ori. Să se calculeze probabilitatea de a obține de 6 ori stema.

18. Se aruncă un zar de 14 ori. Să se calculeze probabilitatea ca fața *1* să apară de 3 ori, fața *2* odată, fața *3* de 4 ori, fața *4* de 2 ori, fața *5* de 3 ori și fața 6 o singură dată.

19. O urnă conține 5 bile albe și 3 negre, o altă urnă, 6 bile albe și 2 negre și a treia, 7 albe și una neagră. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Să se determine probabilitatea ca două bile să fie albe și una neagră.

20. Trei jucători de șah joacă în următoarele condiții: întâi joacă primul cu al doilea; câștigătorul joacă cu al treilea și așa mai departe. Câștigător este acela care învinge de două ori consecutiv. Să se determine probabilitatea de câștig pentru fiecare jucător la începutul primei partide (Se presupune că jucătorii sunt de forțe egale).

21. In problema precedentă, să se calculeze probabilitățile de câștig la începutul partidei a doua, presupunând că al treilea a câștigat prima partidă.

Scanned with OKEN Scanner

22. Se consideră un şir nesfârşit de urne $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ Urna U_n conţine A_n bile albe şi B_n bile negre. Se extrage o bilă din urna U_1 şi extracţia următoare se face din urna U_2. Dacă se fac cel mult s extracţii, care este probabilitatea de a obţine o bilă neagră?

23. O urnă conţine 52 bile colorate. Numărul bilelor de fiecare culoare este egal cu 4. Să se calculeze cel mai mic număr de bile, care trebue să fie scos din urnă, astfel ca posibilitatea ca, printre bilele scoase trei să aibe acelaşi culoare, să fie mai mică decât $1/2$.

24. Avem 52 obiecte dintre care 4 poartă un semn distinctiv. Impărţindu-se aceste 52 obiecte în patru grupe egale, care este probabilitatea ca în fiecare grupă să se găsească un obiect cu semnul distinctiv?

25. Din 16 borcane de câte 1 kg, 4 conţin dulceaţă de caise şi 12, de prune. Grupându-se la întâmplare câte 4 borcane, să se determine probabilitatea ca fiecare grup să conţină un borcan cu dulceaţă de caise.

26. O urnă conţine 20 de bile albe şi 8 negre. Care este probabilitatea de a extrage deodată 7 bile albe şi 3 negre?

27. La loterie sunt N numere şi se extrag n. Care este probabilitatea de a obţine a numere stabilite dinainte?

Caz particular: $N=90$, $n=5$, $a=3$.

28. O urnă conţine 18 bile albe şi 11 negre; se extrag bilele una câte una şi se cere probabilitatea ca, în niciun moment al extracţiilor, numărul bilelor negre ieşite să nu fie mai mare decât cel al bilelor albe ieşite.

29. In 20 de partide de şah, un jucător a câştigat 10 partide şi a pierdut 10. Să se calculeze probabilitatea ca pierderile sale să nu depăşească niciodată câştigurile, ştiind că jucătorii sunt de forţe egale.

30. Membrii unui sindicat, în număr de 1530, votează doi candidaţi. Primul întruneşte 1120 voturi, iar al doilea restul. Să se determine probabilitatea ca, în timpul numărării voturilor, cel ales să aibă mereu mai multe voturi decât celălalt.

31. Aruncând 4 zaruri, să se determine probabilitatea de a obţine faţa *1* cel puţin odată.

32. In problema precedentă să se determine probabilitatea de a obţine faţa *1* o singură dată.

33. Aruncând două zaruri de mai multe ori, să se determine probabilitatea de a obţine faţa *3*, înainte ca oricare faţă să apară de două ori.

34. Se aruncă 7 monete. Care este probabilitatea ca să apară de 5 ori stema şi de 2 ori banul?

35. La o loterie cu 40 000 bilete sunt trei lozuri câştigătoare. Scoţând 8 000 bilete, se cere probabilitatea de a obţine:

a) un loz câştigător;

b) trei lozuri câştigătoare.

36. O urnă conţine 8 bile albe, 8 negre şi 8 roşii. Se extrag 3 bile la întâmplare. Care este probabilitatea ca bilele extrase să fie de culori diferite?

37. Se aruncă de fiecare dată câte trei zaruri. Se cere să se determine numărul de aruncări pentru care probabilitatea de a obţine de două ori faţa *1* la toate zarurile este egală cu $1/2$.

38. Se aruncă un zar. Câte aruncări trebue să fie făcute pentru a se obţine fiecare dintre cele 6 feţe, cel puţin odată, cu probabilitatea $1/2$?

39. Aruncându-se două zaruri, după câte experienţe se poate afirma că probabilitatea ca să se obţină fiecare dintre cele 6 duble, cel puţin odată, este egală cu $1/2$?

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

PROBABILITATEA CAUZELOR

1. Regula de inducţie a lui Bayes

Această regulă pune o serie de probleme de o deosebită însemnătate pentru calculul probabilităţilor şi aplicaţiile lui în cele mai variate domenii.

Un eveniment s'a produs. Admitem că producerea lui se datoreşte uneia dintre cauzele

$$C_1,\ C_2,\cdots,\ C_n.$$

Fie r_i $(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$ probabilitatea ca să acţioneze cauza C_i şi, în acest caz, fie p_i probabilitatea ca evenimentul să se producă.

Probabilitatea P_i ca evenimentul produs să fie datorit cauzei C_i este

$$P_i = \frac{r_i p_i}{r_1 p_1 + r_2 p_2 + \cdots + r_n p_n}. \qquad (1)$$

Formula (1) exprimă *regula de inducţie a lui Bayes.* Exemplele schematice, pe care le vom examina, ne vor servi la demonstrarea formulei.

Două urne U_1 şi U_2 conţin câte 8 bile. Urna U_1 conţine 4 bile albe şi 4 negre, iar urna U_2 are 1 bilă albă şi 7 negre. Se face o extracţie din una dintre urne, la întâmplare, şi bila care iese este neagră. Care este probabilitatea a posteriori ca bila să fi fost scoasă din urna U_2?

Pentru rezolvare, ţinem seama de următoarele date:

1) Probabilitatea de a alege la întâmplare urna U_1 sau urna U_2, presupunând că cele două alegeri au probabilitate egală (deci fiecare dintre aceste probabilităţi are valoarea $1/2$),

$$p_1 = \frac{1}{2};\ q_1 = \frac{1}{2}.$$

2) Probabilităţile structurale ale fiecărei urne

$$p_2 = \frac{1}{8}\,;\quad q_2 = \frac{7}{8}\,.$$

Vrem să calculăm probabilităţile a posteriori P_1 şi P_2. Aceste probabilităţi se numesc a posteriori pentrucă ele au sens, numai după ce cunoaştem rezultatul unei extracţii. Datele ca şi împrejurările experimentale ar fi identice dacă am raţiona în modul următor:

Intr'o urnă unică U avem 16 bile, dintre care 8 au pe ele semnul U_1 şi 8 semnul U_2; primele se împart în două grupuri: 4 bile albe şi 4 negre; cele cu semnul U_2 se împart şi ele în două grupuri, 1 bilă albă şi 7 negre. Probabilităţile a priori sunt aceleaşi ca şi în cazul precedent. Condiţiile unei extracţii sunt deasemenea identice, dacă extracţia se face la întâmplare, atât în ceeace priveşte semnul scris pe bilă, cât şi culoarea ei.

Probabilitatea P_1 ca bila albă extrasă să poarte semnul U_1 (sau să aparţie urnei U_1) este în acest caz evident:

$$P_1 = \frac{4}{5}\,.$$

In mod analog şi

$$P_2 = \frac{1}{5}\,.$$

deoarece 4 din cele 5 bile albe au semnul U_1 şi una singură semnul U_2.

Rezultatul depinde numai în mod aparent de numărul bilelor din cele două urne; în realitate, el se poate exprima numai cu ajutorul probabilităţilor a priori.

Să presupunem că cele două urne au în total n bile şi că p_1, q_1 sunt probabilităţile structurale ale urnei U_1 şi p_2, q_2, probabilităţile structurale ale urnei U_2.

Vom avea, în acest caz, np_1 bile albe cu semnul U_1 şi np_2 bile albe cu semnul U_2. Dacă rezultatul unei extracţii făcute la întâmplare a fost o bilă albă, probabilitatea a posteriori ca bila să aparţină urnei U_1, adică să aibă semnul U_1, va fi

$$P_1 = \frac{np_1}{np_1 + np_2} = \frac{p_1}{p_1 + p_2}\,.$$

Introducând datele numerice din exemplul considerat, obţinem

$$P_1 = \frac{\frac{4}{8}}{\frac{4}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{4}{5}\,,$$

adică tocmai rezultatul pe care l-am găsit înainte.

Scanned with OKEN Scanner

In cazul în care probabilitatea a priori de a alege urna U_1 nu este $\frac{1}{2}$, raționamentul urmează a fi modificat și adaptat acestei împrejurări. Să presupunem că r_1 și r_2 sunt probabilitățile de a alege urna U_1, respectiv U_2; aceasta înseamnă că, în ceeace privește distribuția semnelor U_1 și U_2, structura urnei unice U este dată de numerele r_1 și r_2. Putem admite că în total sunt N bile, dintre care Nr_1 au semnul U_1 și Nr_2 au semnul U_2. Dintre cele r_1N bile cu semnul U_1 vor fi albe, p_1r_1N bile; și dintre cele r_2N bile cu semnul U_2 vor fi albe p_2r_2N bile, deci în total $p_1r_1N+p_2r_2N$ dintre bile vor fi albe.

Probabilitatea ca una dintre acestea să aparțină urnei U_1 este:

$$P=\frac{p_1r_1N}{p_1r_1N+p_2r_2N}=\frac{p_1r_1}{p_1r_1+p_2r_2}.$$

Generalizând schema precedentă cu privire la două urne, pentru n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$, presupunem că avem compozițiile $U_i\ (p_iq_i)$, unde $p_i+q_i=1, (i=1, 2, \ldots, n)$ și fie N numărul total de bile conținute în cele n urne. Compoziția urnei unice U va fi dată de numerele $r_1r_2,\ldots, r_n$ care indică distribuția semnelor $U_1,U_2,\ldots,U_n$; deci $\sum_{i=1}^{n} r_i=1$. In această urnă, avem r_1N bile cu semnul U_1; r_2N bile cu semnul U_2, etc. și, dintre acestea, p_1r_1N, p_2r_2N, ... sunt albe, deci în total

$$\sum_{i=1}^{n} p_ir_iN=N\sum_{i=1}^{n} p_ir_i$$

bile albe.

Probabilitatea ca una dintre aceste bile să aparțină urnei U_1 este

$$P_i=\frac{p_ir_iN}{N\sum_{i=1}^{n} p_ir_i}=\frac{p_ir_i}{p_ir_i+\cdots+p_nr_n},$$

adică tocmai formula (1).

Importanța acestei formule, stabilită de Bayes în 1764, a fost scoasă în relief mult mai târziu de către Laplace care a folosit-o îndeosebi la evaluarea cauzelor unor fenomene rezultate din experiență.

Vom da și o altă demonstrație a regulii lui Bayes. Fie r_i probabilitatea evenimentului C_i (cauza C_i, unde $i=1, 2, \ldots, n$) și p_i probabilitatea evenimentului E în cadrul evenimentului C_i (E poate avea drept cauze fiecare dintre evenimentele $C_1, C_2, \ldots, C_n$).

Scanned with OKEN Scanner

Probabilitatea succesiunii evenimentelor sau a simultaneității evenimentelor C_i și E este egală cu $\pi_i = r_i p_i$ după regula pe care o cunoaștem, dacă sunt îndeplinite anumite condiții necesare de independență, pentru a se aplica formula.

Pe de altă parte, probabilitatea să se producă E, indiferent de cauza C_i, este

$$\sum_{i=1}^{n} r_i p_i .$$

Notând cu P_i probabilitatea a posteriori ca atunci când se produce evenimentul E el să aibă cauza C_i, putem scrie egalitatea

$$\pi_i = P_i \sum_{i=1}^{n} r_i p_i .$$

Avem astfel relația:

$$\pi_i = r_i p_i = P_i \sum_{i=1}^{n} r_i p_i ,$$

de unde deducem probabilitatea căutată

$$P_i = \frac{r_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i r_i} .$$

Exemplul 1. Să admitem că, pentru o anumită populație, mortalitatea de tuberculoză este de $\frac{3}{10}$ și fie p_x mortalitatea la vârsta x. Să determinăm probabilitatea ca un tânăr decedat la vârsta de 20 ani, să fi fost răpus de tuberculoză.

Din m decedați, $\frac{3m}{10}$ își datoresc moartea tuberculozei, iar restul de $\frac{7m}{10}$, altor cauze. Deci, dacă din 1 000 de tineri în vârstă de 20 ani mor în total 1 000 p_{20}, putem deduce că $\frac{3 \cdot 1\,000}{10} p_{20}$ își datoresc moartea tuberculozei. Probabilitatea a posteriori este deci:

$$P = \frac{300\, p_{20}}{300 p_{20} + 700(1 - p_{20})} ,$$

unde numărul p_{20} se găsește în tabelele de mortalitate.

Să vedem în ce condiții probabilitatea a posteriori este mai mare decât cea a priori, adică în ce caz rezultatul experimental

Scanned with OKEN Scanner

marchează cauza mai accentuat de cum se prezintă ea a priori. Pentru aceasta, trebue să avem, în general

$$\frac{p_1 r_1}{p_1 r_1 + (1-p_1) r_2} > p_1 ,$$

adică

$$r_1 > p_1 r_1 + (1-p_1) r_2 \quad \text{sau} \quad r_1 > r_2 .$$

Deducem că, pentru exemplul considerat mai sus, mortalitatea prin tuberculoză trebue să fie mai importantă decât toate celelalte cauze de mortalitate, pentru ca probabilitatea a posteriori să fie mai mare decât cea a priori.

Exemplul 2. Urna U_1 conține 5 bile albe și una neagră, iar urna U_2 conține 3 bile albe și 7 negre. Să se calculeze probabilitatea ca bila albă, extrasă la întâmplare dintr'una din cele două urne, să provină din urna U_1.

Cele două urne conțin respectiv 6 și 10 bile; pentru a putea să le contopim într'o urnă unică U fără a altera probabilitatea de a extrage o bilă albă, trebue să modificăm în mod proporțional numărul bilelor albe și negre din fiecare dintre cele două urne, astfel ca acestea să conțină același număr total de bile, de exemplu 30, care este un multiplu comun al numerelor 6 și 10. Presupunem deci că în U_1 sunt 25 de bile albe și 5 negre, iar în U_2 sunt 9 bile albe și 21 negre. Atunci, în U avem 60 de bile, dintre care 34 albe; dintre acestea, 25 au semnul U_1 și 9 semnul U_2. Deci, probabilitatea căutată va fi $P = \frac{25}{34}$.

2. O nouă deducere a formulei lui Bayes.

Formula lui Bayes se mai poate stabili pornind dela următoarea schemă mult mai generală: fie n_1 urne U_1 și, pentru fiecare, probabilitatea de a extrage o bilă albă fie p_1; în mod analog, definim numerele n_2, p_2 pentru urna U_2, respectiv n_3, p_3 pentru urna U_3, ... și $n_k p_k$ pentru urna U_k. In total avem n urne, deci

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Din una dintre aceste urne se extrage, la întâmplare, o bilă albă. Să calculăm probabilitatea ca această bilă să aparțină uneia dintre urnele U_i.

Putem presupune, fără a micșora generalitatea problemei, că urnele conțin același număr α de bile, dintre care sunt αp_i bile albe,

în fiecare urnă $U_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. Reunind toate cele n urne în urna unică U, aceasta va conține

$$n_1 \alpha p_1 + \cdots + n_k \alpha p_k$$

bile albe, dintre care $n_i p_i \alpha$ provin din urna U_i. Probabilitatea căutată va fi deci

$$P_i = \frac{n_i \alpha p_i}{n_1 \alpha p_1 + \cdots + n_k \alpha p_k} = \frac{n_i p_i}{n_1 p_1 + \cdots + n_k p_k}. \qquad (2)$$

Ținând seama de relația $N = En_i$ și de egalitățile

$$r_1 = \frac{n_1}{n}, \quad r_2 = \frac{n_2}{n}, \quad \ldots, \quad r_u = \frac{n_k}{n},$$

adică probabilitățile a priori de a alege urna $U_1, U_2, \ldots, U_k$, obținem formula lui Bayes

$$P_i = \frac{r_i p_i}{r_1 p_1 + \cdots + r_k p_k}.$$

In rezumat, regula lui Bayes se poate enunța în modul următor:

Când un eveniment depinde în mod necesar de una dintre mai multe cauze și se știe că el s'a verificat, probabilitatea a posteriori ca el să fie datorit unei anumite cauze este proporțională cu produsul dintre probabilitatea a priori a acestei cauze și probabilitatea ca, acționând această cauză, evenimentul să se producă.

Condițiile de valabilitate a regulii lui Bayes sunt:

1) Modalitățile de realizare a evenimentului E să fie independente de modalitățile de realizare a evenimentului C_i. Dependența cauzală dintre C_i și E trebue deci să se refere numai la faptul global că o realizare oarecare a lui C_i poate atrage după sine, cu o probabilitate π_i, o realizare oarecare a lui E.

Această independență asigură valabilitatea teoremei probabilităților compuse, pe care am folosit-o mai înainte.

In ceeace privește aplicarea formulei de adunare a probabilităților, este necesar să admitem

2) Independența cauzelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

3) Faptul că $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formează un sistem complect de cauze.

Formula lui Bayes permite să tragem anumite concluzii asupra probabilității când frecvența este dată. Rezolvarea acestei probleme se bazează tot pe legătura care există între frecvență și probabilitate.

Să examinăm cazul cel mai simplu care, schematic, se poate enunța astfel:

Scanned with OKEN Scanner

S'au făcut n extracții succesive dintr'o urnă, punându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi și s'au obținut k bile albe. Știind că în urnă au fost N bile albe și negre, într'o proporție necunoscută, ne propunem să determinăm probabilitatea ca α bile din urnă să fie albe și $N-\alpha$ negre.

Dacă notăm cu $(\alpha, N-\alpha)$ compoziția unei urne având α bile albe și $N-\alpha$ bile negre, cauzele $C_j\,(j=0, 1, \ldots, n)$ care au putut să producă frecvența $\frac{k}{N}$ sunt determinate de urnele cu compozițiile

$$(0, N),\ (1, N-1), \ldots, (N, 0).$$

Presupunând că a acționat cauza C_h, probabilitatea de a fi obținut frecvența $\frac{k}{n}$ este

$$P_h = C_n^k \left(\frac{h}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{h}{N}\right)^{n-k}.$$

Notând cu r_h probabilitatea de a alege cauza C_n, probabilitatea ca să fi acționat cauza C_h este, după formula lui Bayes,

$$P = \frac{r_\alpha P_\alpha}{r_0 P_0 + r_1 P_1 + \cdots + r_n P_n}. \qquad (3)$$

Aplicând regula lui Bayes ajungem, deci, la formula de mai sus, care nu rezolvă complect problema. Putem, însă, folosi un principiu întrebuințat deseori în statistica matematică, care se numește principiul verosimilității maxime. Să admitem că un eveniment poate lua valorile α cu probabilitățile respective $P(\alpha)$. Știm că, după efectuarea unei experiențe, evenimentul a luat valoarea β. Ce se poate afirma despre $P(\beta)$? Este evident că datele sunt insuficiente pentru rezolvarea problemei. Probleme de această natură, în care, dela cunoașterea frecvenței trebue să ajungem la unele concluzii privind probabilitatea, se întâlnesc, însă, deseori în statistica matematică. Deoarece cu cât probabilitatea este mai mare, cu atât realizarea evenimentului este mai apropiată de certitudine, presupunem că, dacă evenimentul a luat valoarea β în loc de oricare altă valoare α, probabilitatea $P(\beta)$ este mai mare decât toate celelalte probabilități $P(\alpha)$. Este o ipoteză pe care trebue s'o admitem în aceeași măsură în care putem admite că este posibil să tragem concluzii asupra realizării unui eveniment ale cărui probabilități le cunoaștem.

Aplicând acest principiu, trebue să determinăm pe α astfel ca probabilitatea P_α să fie maximă.

Soluția depinde de probabilitățile necunoscute r_α.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă admitem că toate probabilităţile r_a sunt egale între ele, P_a devine:

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{N}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{n-k}}{\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}+\left(\frac{2}{N}\right)^k\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-k}+\cdots+\left(\frac{N-1}{N}\right)^k\left(1-\frac{N-1}{N}\right)^{n-k}}. \quad (4)$$

Pentru ca această funcţie P_a să fie maximă, prin anularea derivatei numărătorului se obţine

$$k\left(\frac{\alpha}{N}\right)^{k-1}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{n-k}-(n-k)\left(\frac{\alpha}{N}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{n-k-1}=0$$

sau, făcând toate simplificările

$$\frac{\alpha}{N}=\frac{k}{n}.$$

PROBLEME

1. Urna U_1 conţine 7 bile albe şi 2 negre, U_2 conţine 8 bile albe şi 4 negre, U_3 conţine 10 bile albe şi 12 negre şi U_4 conţine 8 bile albe şi 12 negre. Din aceste urne se extrage o bilă albă.

Care este probabilitatea ca ea să fi fost extrasă din urna U_3?

2. O urnă conţine 10 bile albe şi negre într'o proporţie necunoscută. Se extrag 4 bile, punând după fiecare extracţie bila înapoi în urnă; toate cele 4 bile au fost albe. Care este probabilitatea ca urna să nu conţină decât bile albe?

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

VALORI MEDII

1. Variabilă aleatorie. Valori medii

Se numeşte variabilă aleatorie (întâmplătoare sau statistică) o variabilă X care poate lua una dintre valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, după cum se verifică respectiv unul dintre evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_n$, pe care le presupunem incompatibile şi $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = E$ [1]).

Să notăm cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ probabilitatea evenimentelor $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Evident $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Mulţimea valorilor variabilei X, cu probabilităţile respective, se numeşte distribuţia variabilei X. O vom nota schematic

$$X\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Să considerăm vârsta X la care poate ajunge un individ în vârstă de 20 ani. X poate lua valorile $21, 22, \ldots, \omega$ (ω fiind vârsta limită a vieţii omeneşti) cu probabilităţile ${}_1p_{20}, {}_2p_{20}, \ldots, {}_{\omega-20}p_{20}$. Deci distribuţia variabilei X este

$$X\begin{pmatrix} 21, & 22, & \ldots, & \omega \\ {}_1p_{20}, & {}_2p_{20}, & \ldots, & {}_{\omega-20}p_{20} \end{pmatrix}.$$

Dacă notăm cu X faţa care apare aruncând un zar, distribuţia variabilei X este

$$X\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

[1]) Cu E se notează ca de obicei evenimentul sigur.

Numărul bilelor albe ieşite dintr'o urnă de compoziţie dată, în n extracţii succesive, punând după fiecare extracţie bila înapoi în urnă, este o variabilă întâmplătoare care poate lua valorile 0, 1, 2, ..., n, cu probabilităţile $q^n, C_n^1 q^{n-1}p, \ldots, p^n$ şi care are deci distribuţia:

$$X\begin{pmatrix} 0, & 1, & 3 & \ldots, n \\ q^n, & C_n^1 q^{n-1}p, & C_n^2 q^{n-2}p^2, & \ldots, p^n \end{pmatrix}.$$

Se numeşte *valoare medie* sau *speranţa matematică* a variabilei aleatorii X, suma produselor dintre valorile pe care le poate lua X şi probabilităţile respective. Valoarea medie se notează cu $M(X)$ sau $E(X)$ sau, mai simplu, cu $\overline{X}$; adoptând prima notaţie, putem scrie:

$$M(X)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i. \tag{2}$$

Să notăm pentru uşurinţa scrierii $M(X)=m$ şi fie x_α cea mai mică dintre valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi x_β cea mai mare dintre aceste valori. Evident, înlocuind în (2) valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin valoarea mai mică x_α, obţinem

$$m \geqq (p_1+p_2+\ldots+p_n)\,x_\alpha = x_\alpha.$$

In mod analog, $m \leqq x_\beta$. Avem, deci, dubla inegalitate

$$x_\alpha \leqq m \leqq x_\beta.$$

In cursul procesului său de variaţie, variabila X oscilează, în jurul valorii ei medii. Să notăm cu ξ_i diferenţa

$$x_i-m=x_i-M(X) \tag{3}$$

şi să o numim abatere dela valoarea medie m.

Am definit în acest mod o nouă variabilă aleatorie, ξ, numită *abatere*, care este egală cu diferenţa $X-M(X)$, adică

$$\xi=X-M(X) \tag{4}$$

şi care are următoarea distribuţie:

$$\xi\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2, \ldots, & \xi_n \\ p_1, & p_2, \ldots, & p_n \end{pmatrix}.$$

Teoremă. *Valoarea medie a abaterii este egală cu zero.*

In adevăr, în baza definiţiei (2) avem

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{n}p_i\xi_i=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-m)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i-m=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. Valoarea medie a numărului de puncte ieşite la aruncarea unui zar este egală cu

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+6\,\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Pentru verificarea teoremei de mai sus, să calculăm $M(\xi)$. Din distribuţia

$$\xi\begin{pmatrix} -2{,}5 & -1{,}5, & -0{,}5, & 0{,}5, & 1{,}5 & 2{,}5 \\ \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

rezultă $M(\xi)=0$.

Exemplul 2. Să calculăm valoarea medie a numărului de bile albe ieşite în n extracţii succesive.

Distribuţia corespunzătoare este

$$X(C_n^i p^i q^{n-i}), \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

deci, aplicând formula (2)

$$M(X)=\sum_{i=0}^{n} i\,C_n^i p^i q^{n-i}.$$

Pentru a calcula suma din partea dreaptă, considerăm identitatea

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i t^i q^{n-i}=(pt+q)^n,$$

unde t este un parametru oarecare.

Derivând această relaţie în raport cu t, deducem

$$\sum_{i=0}^{n} i\,C_n^i p^i t^{i-1} q^{n-i}=np\,(pt+q)^{n-1}.$$

Dacă facem $t=1$ şi ţinem seama că $p+q=1$, rezultă

$$\sum_{i=0}^{n} i\,C_n^i\,p^i t^i q^{n-i}=np.$$

Prin urmare, valoarea medie căutată este

$$M(X)=np.$$

2. Valoarea medie a sumei şi produsului a două variabile aleatorii

Când într'o problemă avem mai multe variabile aleatorii care iau în acelaşi timp valori cunoscute, cu probabilităţi cunoscute,

Scanned with OKEN Scanner

spunem că aceste variabile formează un sistem de variabile aleatorii.

Pentru uşurinţa înţelegerii, să ne limităm la două variabile X şi Y, cu distribuţiile

$$X\begin{pmatrix} x_1, & x_2, \ldots, & x_n \\ p_1, & p_2, \ldots, & p_n \end{pmatrix}, \qquad Y\begin{pmatrix} y_1, & y_2, \ldots, & y_n \\ q_1, & q_2, \ldots, & q_n \end{pmatrix},$$

unde

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1; \qquad q_1+q_2+\cdots+q_n=1.$$

Considerăm ca un eveniment unic faptul că X ia valoarea x_i şi Y ia valoarea y_j; fie P_{ij} probabilitatea acestui eveniment. Perechea (X,Y), poate lua valorile

$$\left.\begin{array}{l} (x_1y_1), \ldots, (x_1y_k), \ (x_2y_1), \ldots, (x_ny_k) \\ \text{cu probabilităţile respective} \\ p_{1i}, \ldots, p_{1k}, \ p_{21}, \ldots, p_{nk} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Dacă valorile luate de X nu depind de valorile luate de Y variabilele X şi Y se numesc *independente*. Evident, în acest caz, avem $p_{ij}=p_ip_j$.

In general, avem relaţiile

$$p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{ik}=p_i; \quad (i=1, 2, \ldots, h)$$

$$p_{ij}+p_{2j}+\cdots+p_{kj}=q_j; \quad (j=1, 2, \ldots, k)$$

de unde rezultă $\sum p_{ij}=p_1+p_2+\cdots+p_h=q_1+q_2+\cdots+q_k=1$.

Variabilelor aleatorii care formează un sistem li se pot aplica diferite operaţii, ca înmulţirea cu o constantă, adunarea, înmulţirea, etc.

Astfel, prin suma $X+Y$ înţelegem o nouă variabilă care poate lua valorile x_i+y_i, cu probabilităţile p_{ij}.

Din definiţia valorii medii, rezultă imediat

$$M(KX)=KM(X). \qquad (6)$$

Teorema 1. *Valoarea medie a sumei unui număr finit de variabile aleatorii este egală cu suma valorilor medii în parte.*

Pentru două variabile avem deci

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Scanned with OKEN Scanner

In adevăr, putem scrie

$$M(X+Y)=p_{11}(x_1+y_1)+\cdots+p_{h1}(x_h+y_1)+\cdots+p_{hk}(x_h+y_k);$$

grupând convenabil termenii din partea a doua, obținem

$$M(X+Y)=x_1\ (p_{11}+\cdots+p_{1k})+\cdots+x_h(p_{h1}+\cdots+p_{k1})+\cdots+$$
$$+y_k(p_{1k}+\cdots+p_{hn}),$$

de unde, ținând seama de relațiile (5)

$$M(X+Y)=p_1x_1+\cdots+p_hx_h+q_1y_1+\cdots+q_ky_k=M(X)+M(Y).$$

In general, pentru n variabile întâmplătoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$, avem

$$M(X_1+X_2+\cdots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n). \qquad (7)$$

Teorema 2. *Valoarea medie a produsului variabilelor independente este egală cu produsul valorilor medii în parte.*

Variabila $Z=XY$ poate lua valorile $x_1y_1,\ldots,x_1y_k,\ x_2y_1,\ldots,x_hy_k$ cu probabilitățile $p_{11},\ldots,p_{1k},\ p_{21},\ldots,p_{hk}$, unde $p_{ij}=p_ip_j$, deoarece evenimentele sunt independente. Putem scrie deci

$$M(XY)=p_{11}x_1y_1+\cdots+p_{1k}x_1y_k+\cdots+p_{h1}x_hy_1+p_{hk}x_hy_h=$$
$$=p_1x_1q_1y_1+\cdots+p_1x_1q_ky_k+\cdots+p_hx_hq_1y_1+\cdots+p_hq_ky_k=$$
$$=(p_1x_1+\cdots+p_hx_h)(q_1y_1+\cdots+q_ky_k)=M(X)\cdot M(Y).$$

In general, pentru n variabile independente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ avem:

$$M(X_1X_2,\ldots,X_n)=M(X_2),\ldots,M(X_n). \qquad (8)$$

Observație. Teoremele (7) și (8) au o mare importanță, deoarece prin aplicarea lor se obține mai simplu valoarea medie în diferite cazuri, în care calculul direct duce mai greu la rezultat.

Exemplul 1. Să aflăm valoarea medie a numărului de bile albe ieșite în n extracții succesive dintr'o urnă de compoziție dată, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă.

Am mai calculat această valoare utilizând formula (2).

Să notăm cu X_i variabila care dă numărul de bile albe ieșite la extracția de rang i. Deoarece în această extracție poate ieși o bilă albă sau niciuna, avem distribuția:

$$X_i\begin{pmatrix}1, & 0\\ p, & q\end{pmatrix}.$$

Numărul total X de bile albe ieşite în cele n extracţii se obţine însumând variabilele X_i, adică

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

de unde, aplicând teorema 1 a sumei de variabile aleatorii, obţinem

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} M(X_i).$$

Insă

$$M(X_i)=p\cdot 1+q\cdot 0=p;$$

deci

$$M(X)=np,$$

adică acelaşi rezultat găsit pe altă cale.

Exemplul 2. Să se calculeze valoarea medie a numărului concordanţelor în n extracţii consecutive (v. problema concordanţelor).

Numărul total X este dat de suma variabilelor X_i care iau valorile 1 sau 0, după cum la extracţia de rang i avem sau nu o concordanţă. Deoarece probabilitatea p a unei concordanţe la extracţia de rang i este $\frac{1}{n}$, avem

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} M(X_i)=n\,\frac{1}{n}=1.$$

3. Momente. Media armonică şi media geometrică

Prin definiţie, expresia

$$M(X^k)=p_1x_1^k+p_2x_2^k+\cdots+p_nx_n^k \tag{9}$$

se numeşte *momentul de ordinul k* al variabilei X, iar expresia

$$M_k=\sqrt[k]{M(X)}=\sqrt[k]{p_1x_1^k+p_2x_2^k+\cdots+p_nx_n^k} \tag{10}$$

se numeşte *valoarea medie de ordinul k* a aceleiaşi variabile.

In particular, pentru $k=1$ obţinem valoarea medie $M(X)$, momentul de ordinul întâi sau media aritmetică a variabilei X.

Pentru $k=-1$, avem

$$M_{-1}=\left(\frac{p_1}{x_1}+\frac{p_2}{x_2}+\cdots+\frac{p_n}{x_n}\right)^{-1},$$

numită *media armonică* a valorilor x_i.

Scanned with OKEN Scanner

Când $k=0$, M_0 se prezintă sub forma nedeterminată
Aplicând logaritmii, obținem

$$\log M_k=\frac{1}{k}\log(p_1x_1^k+\ldots+p_nx_n^k),$$

iar regula lui L'Hôpital ne dă:

$$\lim_{k\to 0}\log M_k=\lim_{k\to 0}\frac{p_1x_1^{-k}\log x_1+\ldots+p_nx_n^k\log x_n}{p_1x_1^{-k}+\ldots+p_nx_n^k}=\frac{p_1\log x_1+\ldots+p_n\log x_n}{p_1+\ldots+p_n}$$

deci

$$\log M_0=\log x_1^{p_1}x_i^{p_2},\ldots,x_n^{p_n},$$

de unde

$$M_0=x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n},$$

expresie care se numește *media geometrică* a valorilor x_i $(i=1,2,\ldots,\overline{n})$.

Momentul de ordinul al doilea

$$M(X^2)=p_1x_1^2+p_2x_2^2+\ldots+p_nx_n^2$$

se numește valoarea medie pătratică a variabilei X.

Avem următoarea relație:

$$\sqrt{M(X^2)}\geq|M(X)|.$$

In adevăr, să determinăm că $M(X^2)\geq M(X^2)$. Pentru aceasta, vom folosi cunoscuta identitate a lui Lagrange

$$\sum a_i^2\sum b_i^2-(\sum a_ib_i)^2\equiv\sum(a_ib_j-a_jb_i)^2,$$

unde luăm $a_i=\sqrt{p_i}$, $b_i=\sqrt{p_i}\cdot x_i$

$$\sum p_i\sum p_ix_i^2-(\sum p_ix_i)^2\equiv\sum p_ip_j(x_i-x_j)^2.$$

Cum însă $\sum p_i=1$; $\sum p_ix_i^2=M(X)^2$; $\sum p_ix_i=M(X)$, iar suma din membrul al doilea este pozitivă, obținem inegalitatea

$$M(X^2)-M(X)^2\geq 0.$$

In cele ce urmează vom folosi adesea următoarea teoremă importantă:

Dacă $M(X_1)=M(X_2)=M(X_n)=0$, *și* $X_1, X_2\ldots X_n$ *sunt variabile aleatorii independente*, avem

$$M[(X_1+X_2+\ldots+X_n)^2]=M(X_1^2)+M(X_2^2)+\ldots+M(X_n^2),\qquad(11)$$

In adevăr, putem scrie

$$M[(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2]=M[\sum X_i^2+2\sum X_iX_j]=M(\sum X_1^2)+M(2\sum X_iX_j).$$

Insă

$$M(2\sum X_1X_j)=2M(\sum X_iX_j)=2\sum M(X_iX_j)=2\sum M(X_i)\,M(X_j)=0,$$

$$M(\sum X_i^2)=\sum M(X_i^2).$$

4. Abaterea medie pătratică. Inegalitatea lui Cebâşev

Am definit mai înainte variabila $\xi=X-M(X)$ numită abaterea variabilei X. Valoarea medie pătratică a variabilei ξ se numeşte *abaterea medie pătratică* şi se notează, în general, cu μ

$$\mu=\sqrt{M(\xi^2)} \tag{12}$$

sau, ţinând seama de distribuţia variabilei ξ

$$\xi\begin{pmatrix}\xi_i\\ p_i\end{pmatrix}\equiv\xi\begin{pmatrix}x_i-m\\ p_i\end{pmatrix},\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

obţinem

$$\mu=\sqrt{\sum p_i(x_i-m)^2}. \tag{13}$$

Efectuând calculele de sub radical, zezultă

$$\mu=\sqrt{\sum p_ix_i^2-2m\sum p_ix_i+m^2\sum p_i}$$

Cum

$$\sum p_i=1;\quad \sum p_ix_i=M(X);\quad \sum p_ix_i^2=M(X^2),$$

abaterea medie pătratică se mai poate scrie şi sub forma

$$\mu=\sqrt{M(X^2)-[M(X)]^2}. \tag{14}$$

Aplicaţii. Am calculat valoarea medie a numărului de bile albe ieşite dintr'o urnă în n extracţii succesive, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă şi am obţinut valoarea $M(X)=np$, unde p este probabilitatea de a extrage o bilă albă.

Să calculăm acum abaterea medie pătratică a acestui număr.

Din distribuţia variabilei X

$$X\begin{pmatrix}0, & 1, & \ldots, & n\\ q^n, & C_n^1q^{n-1}p, & \ldots, & p^n\end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $q=1-p$, deducem distribuţia variabilei

$$\xi\begin{pmatrix} -np, & 1-np, & \ldots, & n-np \\ q^n, & C_n^1 q^{n-1}p, & \ldots, & p^n \end{pmatrix}$$

Să luăm

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n,$$

unde $\xi_i=X_i-p$, iar X_i ia valorile 1 sau 0, după cum la extracţia de rangul i se verifică evenimentul E de a scoate o bilă albă, sau nu se verifică. Deci ξ_i reprezintă abaterea relativă la extracţia de rangul i şi ia valorile $1-p$ şi $0-p=-p$, cu probabilităţile respective p şi q.

Avem, deci, distribuţia variabilei ξ_i.

$$\xi_i\begin{pmatrix} 1-p, & -p \\ p, & q \end{pmatrix}.$$

Valoarea medie pătratică pentru această distribuţie este

$$M(\xi_i^2)=p(1-p)^2+q(-p)^2=pq(p+q)=pq.$$

Deoarece $M(\xi_i)=0$ şi variabilele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt independente, în baza relaţiei (12) obţinem

$$M(\xi^2)=M[(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)^2]=M(\xi_1^2)+\cdots+M(\xi_n^2)$$

adică $M(\xi^2)=npq$, deci abaterea medie pătratică

$$\mu=\sqrt{npq}.$$

Cunoscând abaterea medie pătratică μ, deducem un rezultat important pentru teoria probabilităţilor, care a fost pus în evidenţă de marele matematician rus Cebâşev, şi anume că putem determina o limită inferioară a probabilităţilor ca abaterile (X_i-m) să fie mai mici decât un număr pozitiv dat ε.

Se consideră valorile X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, pentru care avem

$$|X_i-m|<\varepsilon,$$

ceeace echivalează cu faptul că valorile X_i sunt cuprinse în intervalul $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$, deoarece inegalitatea de mai sus este echivalentă cu relaţiile

$$m-\varepsilon \leq x_i \leq m+\varepsilon.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să aranjăm valorile $|x_i-m|$ în ordinea mărimii lor crescătoare şi fie

$$|x_i-m|<|x_r-m|<\cdots<|x_n-m|$$

această ordine. Unele dintre aceste valori vor fi mai mici decât ε, altele, mai mari, adică

$$|x_i-m|<\cdots<|x_s-m|<<\varepsilon|x_{s+1}-m|<\cdots<|x_n-m|.$$

Pe de altă parte, avem

$$\mu^2=p_1(x_1-m)^2+\cdots+p_s(x_s-m)^2+p_{s+i}(x_{s+1}-m)^2+\cdots+p_n(x_n-m)^2$$

şi dacă înlocuim valorile

$$x_1-m;\quad x_2-m,\ldots,x_s-m$$

prin zero şi valorile $x_{s+1}-m,\ldots,x_n-m$ prin ε, obţinem

$$\mu^2\geq(p_{s+1}+p_{s+r}+\cdots+p_n)\,\varepsilon^2.$$

Insă

$$p_{s+1}+\cdots+p_n=1-(p_1+p_2+\cdots+p_n),$$

deci

$$\mu^2\geq\left(1-\sum_{i=1}^{s}p_i\right)\varepsilon^2;\ \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}\geq1-\sum_{i=1}^{s}p_i$$

şi, prin urmare

$$\sum_{i=1}^{s}p_i\geq1-\frac{\mu^2}{\varepsilon^2}.$$

Insă, $\sum_{i=1}^{s}p_i$ reprezintă, în baza teoremei probabilităţilor totale, probabilitatea ca X să ia una dintre valorile x_1, $x_2,\ldots,x_p$ sau, ceeace este acelaşi lucru, probabilitatea ca să obţinem pentru X o abatere mai mică decât ε. Notând această probabilitate cu $P(|X-m|<\varepsilon)$, obţinem inegalitatea lui Cebâşev.

$$P(|X-m|<\varepsilon)\geq1-\frac{\mu^2}{\varepsilon^2}. \tag{15}$$

Dacă luăm μ ca unitate de măsură pentru abateri şi notăm $\varepsilon=k\mu$, obţinem:

$$P(|X-m|<\varepsilon)\geq1-\frac{1}{k^2}. \tag{16}$$

Pentru $k=3$, de exemplu, avem $P\geq\frac{8}{9}$, deci, cu o probabilitate cuprinsă între $\frac{8}{9}$ şi 1, abaterile oricărei variabile sunt cuprinse întotdeauna între -3μ şi $+3\mu$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Abaterea medie pătratică a unei sume

In sfârşit, vom enunţa o ultimă teoremă utilă în aplicaţii.

Dacă $\mu_i (i = 1, 2, ..., n)$ sunt abaterile medii pătratice relative la variabilele independente X_i şi dacă μ este abaterea medie pătratică relativă la suma $X = X_k + X_2 + \cdots + X_n$, avem relaţia

$$\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2. \tag{17}$$

In adevăr, din relaţia

$$X = \sum X_i$$

deducem

$$M(X) = \sum M(X_i),$$

de unde, prin scădere, obţinem

$$X - M(X) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n - M(X_1) - M(X_2) - \cdots - M(X_n) =$$
$$= X_1 - M(X_1) + X_2 - M(X_2) + \cdots + X_n - M(X_n),$$

deci:

$$M[X - M(X)]^2 =$$

$$= M\sum [X_k - M(X_k)]^2 = \sum M[X_k - M(X_k)]^2 + 2\sum M[X_k - M(X_k)]M[X_e - M(X_e)].$$

Insă

$$M[X_k - M(X_k)] = \sum M(X_k) - M(X_k) = 0.$$

Prin urmare

$$M[X - M(X)]^2 = \sum M[X_k - M(X_k)]^2,$$

sau

$$\mu^2 = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2.$$

In acelaşi mod se arată că, dacă

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n,$$

avem relaţia şi mai generală

$$\mu^2 = a_1^2 \mu_1^2 + a_2^2 \mu_2^2 + \cdots + a_n^2 \mu_n^2.$$

6. Inegalităţi între valorile medii

Valorile medii mai satisfac şi alte inegalităţi. Avem, de exemplu, următoarea teoremă:

Oricare ar fi numerele r, r', care satisfac inegalitatea $r' > r$, avem întotdeauna $M_{r'} > M_r$, dacă valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt pozitive.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru demonstrarea teoremei, în cazul cel mai general, vom folosi inegalitatea lui Hölder-Jensen

$$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)\leq\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

în care $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere pozitive, iar $f(x)$ este o funcţie convexă [1]) regulată de x, pentru $x>0$.

La inegalitatea lui Hölder-Jensen se ajunge pe cale intuitivă plecând dela curba convexă $y=f(x)$, definită pentru $x>0$; pe această curbă considerăm punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$, care corespund absciselor $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Să presupunem că în punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sunt situate masele $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Din cauza convexităţii curbei $y=f(x)$, centrul de greutate al punctelor $M_1, M_2, \ldots, M_n$ se găseşte deasupra curbei alese. Avem, prin urmare:

$$\eta \geq f(\xi),$$

dacă notăm cu ξ şi η abscisa şi ordonata centrului de greutate. Insă

$$\xi=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

$$\eta=\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

Inlocuind ξ şi η cu aceste valori în inegalitatea de mai sus, obţinem inegalitatea Hölder-Jensen.

Dacă $p>1$, se ştie că funcţia $y=x^p$ este convexă pentru $x>0$. Luând $f(x)=x^p$, inegalitatea Hölder-Jensen dă:

$$\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)^p\leq\frac{p_1x_1^p+\cdots+p_nx_n^p}{p_1+\cdots+p_n}. \qquad (18)$$

Această inegalitate subsistă evident şi dacă în locul numerelor pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$, presupuse oarecare, punem numerele $x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r$.

---

[1]) O funcţie $f(x)$ este convexă într'un interval dat, dacă

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

oricare ar fi x şi y în intervalul considerat.

Scanned with OKEN Scanner

Obținem astfel:

$$\left(\frac{p_1x_1^r+\cdots+p_nx_n^r}{p_1+\cdots+p_n}\right)^p \leq \frac{p_1x_1^{pr}+\cdots+p_nx_n^{pr}}{p_1+\cdots+p_n}$$

Dacă ridicăm ambii membrii la puterea $\frac{1}{rp}$ și ținem seama că $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, rezultă:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_r^i\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{pr}\right)^{\frac{1}{pr}}$$

sau, folosind notația noastră,

$$M_r \leq M_{pr},$$

oricare ar fi $p>1$ și r pozitiv.

Am demonstrat, deci, că:

$$M_{r'} \geq M_r$$

dacă

$$r' > r \geq 0.$$

Rămâne să examinăm și cazul în care r este negativ.

Pentru aceasta, pornim tot dela inegalitatea (18), în care înlocuim numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu $x_1^{-r}, x_2^{-r}, \ldots, x_n^{-r}$, r fiind un număr pozitiv.

Deoarece $\sum p_i = 1$, avem

$$\left(\sum p_i x_i^{-r}\right)^p \leq \sum p_i x_i^{-pr}.$$

Ridicând la puterea $-\frac{1}{pr}$, obținem

$$\left(\sum p_i x_i^{-r}\right)^{\frac{-1}{r}} \geq \left(\sum p_i x_i^{-rr}\right)^{\frac{-1}{pr}}$$

$$M_{-r} \geq M_{-pr}.$$

Notând $-r=s'$; $-pr=s$, inegalitatea de mai sus devine

$$M_{s'} \geq M_s$$

dacă

$$s < s' < 0.$$

Teorema este deci demonstrată în toate cazurile posibile.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME

1. Se aruncă 3 zaruri. Să se calculeze valoarea medie a sumelor de puncte obținute.

Să se generalizeze.

2. Intr'o urnă sunt 10 bile albe și 10 bile negre. Se fac extracții succesive din urnă fără a pune bila extrasă înapoi în urnă, până ce se obține o bilă albă. Să se calculeze valoarea medie a numărului de bile negre extrase.

Să se generalizeze.

3. Să se rezolve problema de mai sus, dacă după fiecare extracție bila este pusă înapoi în urnă.

4. Notând cu M_k momentul de ordinul k al unei variabile X, să se arate că avem inegalitățile

$$[(M_2)]^s \leqq M_{2s},$$

oricare ar fi numărul întreg și pozitiv s.

5. Folosind notația din problema precedentă, să se arate că avem

$$\begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_n \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ M_n & M_{n+1} & \cdots & M_{2n} \end{vmatrix} \geqq 0.$$

6. Notând cu μ_k momentul de ordinul k al variabilei $X-M_1$, să se arate că avem

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = M_2 - M_1^2$$

$$\mu_k = M_k - C_k^1 M_1 M_{k-1} + C_k^2 M_1^2 M_{k-2} - \cdots$$

7. Aplicând teorema lui Cebâșev, să se găsească limita inferioară a probabilității inegalității

$$\left| \frac{\alpha}{10^5} - \frac{1}{6} \right| < \frac{1}{100}$$

știind că α reprezintă numărul de apariții ale feței 5 în 100 000 aruncări de zar.

8. Se aruncă o monetă de n ori. Cât de mare trebue să fie n pentru ca probabilitatea inegalității

$$\left| \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

să fie mai mare decât 0,99, știind că α reprezintă numărul de apariții ale unei fețe alese de mai înainte.

Scanned with OKEN Scanner

9. Persoanele A și B joacă în următoarele condiții: se aruncă două zaruri și când suma punctelor obținute este mai mică decât 10, atunci B plătește lui A suma de 5 lei. In caz contrar, A plătește lui B o sumă fixă a. Să se determine această sumă astfel încât jocul să fie echitabil.

10. O urnă conține 31 bile albe și 19 negre. O persoană scoate bilele una câte una, până când obține 14 bile albe.

Să se determine valoarea medie a numărului de bile negre extrase.

11. O urnă conține 23 bile numerotate dela 1 la 23. Să se calculeze valoarea medie a numărului de cazuri când bila extrasă coincide cu rangul extracției.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

VARIABILA ALEATORIE. FUNCȚIA DE REPARTIȚIE. FUNCȚIA CARACTERISTICA

1. Variabilă aleatorie

Fie E o mulțime de evenimente elementare, F un câmp de evenimente și P probabilitatea corespunzătoare. Să facem ca fiecărui eveniment elementar α din E să-i corespundă un număr real $x=f(\alpha)$. Dacă mulțimea evenimentelor elementare α din E, pentru care avem $f(\alpha)<a$, oricare ar fi numărul real a, este un eveniment (din F), vom spune că $x=f(\alpha)$ este *o variabilă aleatorie*, definită pe E.

Această definiție coincide evident cu definiția dată în capitolul precedent, dacă mulțimea evenimentelor elementare este finită.

Exemplul 1. Se consideră o urnă compusă din n_1 bile albe și n_2 bile negre. Fiecărei extracții care dă o bilă albă îi facem să corespundă valoarea 0, fiecărei extracții care dă o bilă neagră îi facem să corespundă valoarea 1. Funcția care stabilește această corespondență este $f(\alpha)$.

Dacă $a<0$, nu există extracții care să dea evenimente α pentru care $f(\alpha)<0$; ele constitue evenimentul *imposibil*.

Dacă $0<a\leq 1$, evenimentul care dă $f(\alpha)<a$ este extracția unei bile albe.

Dacă $a>1$, evenimentul pentru care $f(\alpha)<a$ este extracția unei bile albe sau a unei bile negre, deci evenimentul *total*.

Prin urmare, $x=f(\alpha)$ este o variabilă aleatorie.

Valorile ei sunt 0 și 1.

Cititorul poate construi singur o variabilă aleatorie cu trei valori, corespunzând extracțiilor dintr'o urnă care conține bile cu trei culori.

Pentru un zar, variabila aleatorie are șase valori.

Exemplul 2. Se consideră un panou de tragere la țintă.

Sunt două moduri de a determina o variabilă aleatorie în legătură cu evenimentele respective.

Primul mod ne conduce la o variabilă cu un număr finit de valori.

Se descriu pe panou diferite cercuri concentrice în jurul unui punct O care este ținta. Loviturilor care cad în centrul cel mai mic le atribuim valoarea zero, acelor cuprinse între cercul cel mic și al doilea cerc, le atribuim valoarea 1 și așa mai departe, până la ultimul cerc, de exemplu al 10-lea. Tuturor loviturilor care cad înafara cercului al 10-lea le atribuim valoarea 10.

Este ușor de văzut că am construit astfel o variabilă aleatorie x, susceptibilă de 10 valori.

Există și un al doilea mod de a ataşa o variabilă aleatorie acestor evenimente.

Pe panoul pe care este marcată ținta în punctul O, considerăm o axă de coordonate care trece prin O, acest punct fiind originea absciselor de pe axă. Fiecărei lovituri îi corespunde o abscisă x. Loviturile pentru care $x<a$ constituie, evident, un eveniment al câmpului.

Variabila x astfel construită, cu abscise, este continuă, spre deosebire de cele construite până acum, care erau discontinue și aveau un număr finit de valori.

Pentru două axe de coordonate diferite, vom avea două variabile aleatorii diferite.

2. Funcția de repartiție

Reluând exemplele de mai sus ne dăm seama imediat în ce mod asociem probabilități variabilei aleatorii.

In cazul urnei, variabila aleatorie are valoarea 0, dacă bila extrasă este albă; asociem dar valorii 0 probabilitatea $p=\frac{n_1}{n_1+n_2}$ de a extrage o bilă albă din urnă; după aceeași regulă, asociem valorii 1 a variabilei aleatorii probabilitatea $q=\frac{n_2}{n_1+n_2}$ de a extrage o bilă neagră.

In cazul panoului de tragere, dacă alegem variabila aleatorie discontinuă cu 11 valori, după regiunea din panou în care cade lovitura, fiecăreia dintre cele 11 valori îi atribuim ca probabilitate pe aceea pe care ne-o indică teoria și experiența tragerilor pentru regiunile respective.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă alegem variabila aleatorie dată de o abscisă continuă, procedeul acesta de a asocia o probabilitate fiecărei valori a variabilei aleatorii încetează de a duce la un rezultat satisfăcător. Se vede uşor că, înafară de eventuale valori excepţionale, probabilitatea unei valori a variabilei aleatorii trebuie să fie considerată egală cu 0.

In cazul variabilei continue, avem însă un alt mijloc de a-i asocia o probabilitate, mijloc valabil şi în cazul în care variabila are valori discontinue, si anume: valoarea probabilităţii ca variabila să fie cuprinsă între a *şi* b $(a<b)$ *este egală cu probabilitatea evenimentului respectiv* (eveniment alcătuit din acele evenimente α pentru care $x=f(\alpha)$ este cuprins între a şi b).

Insă, pentru evaluarea acestei probabilităţi este necesar şi suficient să cunoaştem probabilitatea ca x să fie mai mic decât a.

Această probabilitate este evident o funcţie de a, pe care o vom numi *funcţia de repartiţie* a variabilei aleatorii x şi pe care o vom nota cu $F(a)$.

Din această definiţie se vede că probabilitatea ca $a \leqq x < b$ este egală cu $F(b)-F(a)$.

Din definiţia ei, rezultă imediat că

1) Funcţia $F(a)$ este nedescrecătoare când a creşte dela $-\infty$ la $+\infty$,

2) $F(-\infty)=\lim_{a\to-\infty} F(a)=0$,

3) $F(+\infty)=\lim_{a\to+\infty} F(a)=1$,

4) $F(a)$ este continuă la stânga

$$F(a-0)=F(a).$$

Exemplul 1. Funcţia de repartiţie pentru variabila aleatorie corespunzând extracţiei dintr'o urnă care cuprinde 20 bile albe şi 10 negre este dată de graficul din fig. 2.

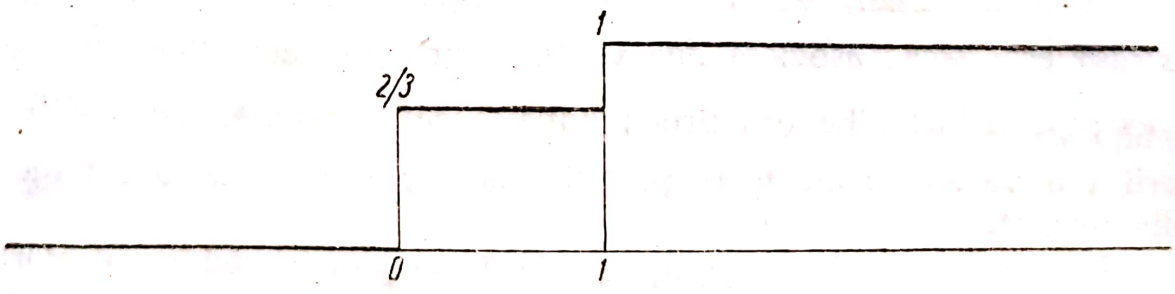

Fig. 2

Exemplul 2. In cazul tragerii la ţintă asupra panoului, dacă variabila aleatorie este abscisa faţă de o axă care trece prin ţintă

Scanned with OKEN Scanner

știința balisticei ne dă pentru funcția de repartiție următoarea expresie:

$$F(a) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-h^2x^2} dx,$$

care se numește repartiția lui *Gauss-Laplace* sau repartiția *gaussiană*, având *precizia* h.

Exemplul 3. Din exemplele precedente se poate vedea că, dacă variabila are un număr finit de valori, probabilitățile corespund direct acestor valori; utilitatea funcției de repartiție este aproape nulă.

Același lucru se întâmplă și când valorile variabilei aleatorii constitue un șir numărabil ca, de exemplu, chemările la telefon semnalizate de lămpile unei centrale telefonice.

Intr'un interval de t secunde, se pot produce $0, 1, 2 \ldots n$ chemări; probabilitățile respective ale acestor evenimente sunt

$$e^{-kt}, e^{-kt}\frac{kt}{1}, \ldots, e^{-kt}\frac{(kt)^n}{n!}, \ldots$$

Dacă luăm x egal cu numărul chemărilor, probabilitățile de mai sus sunt acelea ale variabilei x, care reprezintă numărul chemărilor într'un interval t; k este o constantă proprie care depinde de regimul general telefonic (tarif, numărul de abonați, etc.).

Aceeași schemă este valabilă și pentru numărul particulelor emise de o cantitate de substanțe radioactive într'un interval t. Pentru aceste emisiuni, k este o caracteristică a substanței.

3. Densitatea de probabilitate

Să considerăm în particular o variabilă aleatorie X, pentru care probabilitatea ca X să fie cuprins între a_0 și a este dată de o expresie de forma

$$F(a) - F(a_0) = \int_{a_0}^{a} \rho(x)\, dx, \qquad (1)$$

unde $\rho(x)$ este o funcție continuă. Astfel, în cazul variabilei cu repartiție gaussiană avem:

$$\rho(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

Din formula de mai sus rezultă

$$\rho(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

și cum funcția $F(x)$ este nedescrescătoare $\rho(x)$ este pozitivă.

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia pozitivă ρ se numeşte *densitate de probabilitate.*

Vom numi repartiţii continue acele repartiţii pentru care densitatea $\rho(x)$ există şi este continuă.

Se spune în acest caz, în mod simbolic, că probabilitatea ca X să ia o valoare cuprinsă între a şi $a+da$ este $\rho(a)\,da$.

Această expresie reprezintă, în fapt, acelaşi lucru ca şi egalitatea (1).

Să presupunem, acum, că variabila aleatorie X are numai valori pozitive sau zero — prin urmare, probabilitatea ca $X \leq 0$ este nulă — şi că probabilitatea corespunzătoare variabilei este exprimată cu ajutorul densităţii

$$\rho(x) = he^{-k^2x}; \quad x \geq 0.$$

Pentru ca $\rho(x)$ să fie o adevărată densitate de probabilitate, este evident necesar şi suficient ca:

$$h \int_0^{\infty} e^{-k^2x}\,dx = 1,$$

egalitate care exprimă că probabilitatea ca X să aibă o valoare pozitivă oarecare este 1. Din această egalitate rezultă $h = \frac{2k}{\sqrt{\pi}}$.

Această repartiţie nu este simetrică, în timp ce repartiţia lui Gauss este simetrică, deoarece pentru repartiţia lui Gauss avem:

$$\rho(x) = \rho(-x).$$

4. Funcţia caracteristică

Se asociază fiecărei variabile aleatorii X o funcţie cu valori complexe de variabila reală t, obţinută ca valoare medie a variabilei e^{itx}, adică

$$\varphi(t) = \sum_1^n{}_k\, p_k e^{itx_k}$$

în cazul variabilei cu un număr finit de valori,

$$\varphi(t) = \sum_1^{\infty}{}_k\, p_k e^{itx_k}$$

în cazul unei mulţimi infinite de valori şi

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,\rho(x)\,dx$$

Scanned with OKEN Scanner

în cazul unei distribuții continue cu densitatea de repartiție $\rho(a)$. În toate cazurile, funcția $\varphi(t)$ este bine determinată pentru orice valoare reală a lui t.

$\varphi(t)$ se numește *funcția caracteristică* a variabilei X.

Exemple. În cazul urnei $X=1$ cu probabilitatea p și $X=0$ cu probabilitatea $q=1-p$

$$\varphi(t)=pe^{it}+q.$$

În cazul variabilei Poisson[1])

$$\varphi(t)=e^{-a}\sum\frac{a^n}{n!}e^{itx}.$$

Deci

$$\varphi(t)=e^{a(e^{it}-1)}.$$

În cazul variabilei gaussiene

$$\varphi(t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}e^{-h^2x^2}dx.$$

Deci

$$\varphi(t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4h^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(hx-\frac{i}{2h}t\right)^2}dx.$$

Se poate arăta ușor că

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(hx-\frac{i}{2h}t\right)^2}dx=1;$$

Deci

$$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{4h^2}},$$

---

[1]) Numim *variabilă aleatorie Poisson* o variabilă X care poate lua numai valorile întregi 0, 1, 2, ..., n, cu probabilitatea

$$e^{-a},\ e^{-a}\frac{a}{1!},\ e^{-a}\frac{a^2}{2!},\ \ldots,\ e^{-a}\frac{a^n}{n!},\ \ldots$$

unde a este un număr real pozitiv.

Scanned with OKEN Scanner

5. Determinarea funcției de repartiție

Vom da fără demonstrație formula pentru densitatea de repartiție $\rho(x)$, când se cunoaște funcția caracteristică

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt,^{1})$$

presupunând că a și b diferă de toți x_r.

Această formulă ne arată însemnătatea funcției caracteristice. Odată cu ea este dată și legea de repartiție a valorilor variabilei aleatorii și reciproc.

Să considerăm, de exemplu, cazul:

$$\varphi(t) = p_1 e^{ix_1 t} + \ldots + p_n e^{ix_n t}$$

și să stabilim formula care ne duce la valorile p_r, dacă cunoaștem pe $\varphi(t)$.

Observăm că, pornind dela formula bine cunoscută

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{1}{2},$$

obținem

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin (a-x)\, t}{t}\, dt = \pm \frac{1}{2},$$

după cum $a > x$ sau $a < x$. Prin urmare, dacă $a > b$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin (b-x)\, t}{t} - \frac{\sin (a-x)\, t}{t} \right] dt = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

după cum x este exterior intervalului (a, b) sau interior acestui interval.

Insă, primul membru al expresiei precedente se mai poate scrie:

$$\lim_{c \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} e^{+itx} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{-it}\, dt,$$

---

[1]) Sensul în care este luată această interpretare va fi precizat în fiecare caz.

Scanned with OKEN Scanner

Deci, această expresie are valoarea 0, dacă x este exterior intervalului a, b, şi valoarea 1, dacă x este interior acestui interval.

Rezultă de aici că:

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\varphi(t)\,\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{-it}\,dt=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\sum p_k e^{ix_kt}\,\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{-it}\,dt=$$

$$=\sum p_k;\quad (a<x_k<b),$$

6. Proprietăţi generale ale funcţiei caracteristice

Dintre proprietăţile generale ale funcţiei caracteristice enunţăm următoarele:

1) Dacă $\varphi(t)$ este funcţia caracteristică a unei variabile aleatorii cu număr finit de valori, avem

$$\varphi(0)=\sum_{1}^{n}{}_k\,p_k=1.$$

Dacă $\varphi(t)$ corespunde unei densităţi continue

$$\varphi(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(a)\,da=1.$$

2) $\varphi(t)$ este o funcţie continuă, pentru orice t real. Continuitatea este evidentă în cazul finit.

In cazul unei densităţi continue, avem:

$$\varphi(t+h)-\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t+h)}\rho(x)\,dx-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\rho(x)\,dx=$$

$$=\int_{-A}^{+A}e^{itx}\rho(x)\,(e^{ihx}-1)\,dx+\int_{-\infty}^{-A}e^{i(t+h)}\rho(x)\,dx+$$

$$+\int_{A}^{+\infty}e^{i(t+h)x}\,dx-\int_{-\infty}^{A}e^{itx}\rho(x)\,dx-\int_{A}^{+\infty}e^{itx}\rho(x)\,dx.$$

Se alege A, astfel ca

$$\int_{-\infty}^{-A}\rho(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{5},\qquad\int_{A}^{+\infty}\rho(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

și h astfel ca

$$|e^{ihA}-1|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

Rezultă, în aceste condiții

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|<\epsilon,$$

oricare ar fi t. Continuitatea este deci uniformă pentru orice t real.

3) $$|\varphi(t)|\leq\varphi(0)$$

deoarece, ținând seama că $|e^{itx}|=1$, obținem

$$|\varphi(t)|\leq\sum_{1}^{\infty}p_k=1=\varphi(0)$$

respectiv

$$|\varphi(t)|<\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(a)\,da=1=\varphi(0).$$

4) Dacă în expresia

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}p_k e^{itx_k}\text{[1)]}$$

ținem seama că

$$e^{itx}=\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{i^n x_k^n t^n}{n!}$$

și ținem, deasemenea, seamă de expresia momentelor de diferite ordine, obținem

$$\varphi(t)=1+iM_1(X)\frac{t}{1}+i^2M_2(X)\frac{t^2}{2!}+\ldots+i^nM_n(X)\frac{t^n}{n!}+\ldots$$

seria din membrul drept fiind, ca și seria de mai sus, convergentă pentru orice t finit.

Exemplu. Fie

$$\varphi(t)=pe^{it}+q=1+p\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{t^n}{n!}.$$

Deci, în acest caz, toate momentele sunt egale cu p

$$M_n(X)=p.$$

---

[1]) Corespunzătoare variabilei aleatorii

$$X\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_n\\p_1,\ldots,p_n\end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă considerăm variabila abatere, valorile ei sunt q și $-p$, cu probabilitățile p și q, prin urmare, funcția caracteristică respectivă este:

$$\psi(t) = pe^{iqt} + qe^{-ipt} = 1 + \sum i^n \left[pq^n + q(-p)^n\right] \frac{t^n}{n!},$$

ceeace înseamnă că

$$M_1 = 0; \quad M_2 = pq; \quad M_3 = pq(q-p); \quad M_4 = pq(1-3pq); \ldots$$

Reciproc, dacă

$$\varphi(t) = \sum_0^\infty{}_m \, i^m a_m \frac{t^m}{m!} \tag{2}$$

este o serie convergentă pentru $|t| < t_0$ și dacă există un număr de valori x_k și un sistem de probabilități corespunzătoare p_k, astfel încât

$$a_m = \sum_1^n{}_k \, p_k x_k^m,$$

atunci $\varphi(t)$ reprezintă funcția caracteristică a variabilei X respective.

Verificarea se face înlocuind în $\varphi(t)$ valorile a_m și regrupând termenii, ceeace ne dă

$$\varphi(t) = \sum_1^n{}_k \, p_k e^{itx_k}.$$

Dacă există o densitate de repartiție $\rho(x)$, astfel încât

$$a_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \rho(x)\, dx,$$

înlocuind în (2), obținem

$$\varphi(t) = \sum_1^\infty{}_m \int \frac{i^m x^m t^m}{m!} \rho(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \rho(x)\, dx,$$

adică tocmai expresia funcției caracteristice corespunzătoare variabilei.

7. Teoreme de convergență

Fie $X^{(s)}$ un șir ($s = 0, 1, 2, \ldots$) de variabile aleatorii, având funcțiile caracteristice respective $\varphi^{(s)}(t)$. Dacă

$$\varphi^{(s)}(t) \to \varphi^{(0)}(t)$$

pentru orice t finit, vom spune că șirul $X^{(s)}$ *converge în repartiție* către variabila $X^{(0)}$, care are pe $\varphi^{(0)}(t)$ ca funcție caracteristică.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă. *Dacă variabilele* $X^{(s)}$ *și* X *au momente de toate ordinele* $M_l^{(s)}$ și M_l, *iar seriile*

$$\varphi^{(s)}(t) = \sum_0^\infty i^l M_l^{(s)} \frac{t^l}{l!} \tag{3}$$

și

$$\varphi(t) = \sum_l i^l M_l \frac{t^l}{l!}, \tag{4}$$

sunt convergente pentru orice t *și dacă* $\varphi^{(s)}(t)$ *tinde către* $\varphi(t)$ *în mod uniform într'un interval* $|t| < t_0$, *atunci:*

$$M_l^{(s)} \longrightarrow M_l,$$

când s tinde către infinit.

Demonstrația este imediată dacă observăm că funcțiile $\varphi^{(s)}(t)$ și $\varphi(t)$ sunt analitice și că

$$i^l M_l^{(s)} = \left[\frac{d^l(\varphi^{(s)}(t))}{dt^l}\right]_{t=0}.$$

Insă, din teoria funcțiilor analitice se știe că, odată cu convergența funcțiilor $\varphi^{(s)}(t)$ către $\varphi(t)$, avem și convergența derivatelor de orice ordin

$$\frac{[d^l\varphi^{(s)}(t)]}{dt^l} \longrightarrow \frac{[d^l\varphi(t)]}{dt^l}$$

pentru $|t| < t_0$, deci pentru $t = 0$.

Următoarea teoremă, întrucâtva reciprocă precedentei, are o însemnătate deosebită pentru teoria probabilităților.

Ea constituie baza metodei momentelor folosită în numeroase aplicații.

Teoremă. *Dacă seriile (3) și (4) sunt convergente pentru orice* t *și dacă* $|M_l^{(s)} - M_l| < \epsilon$ *când* $s > S(\epsilon)$, *indiferent de* l $(M_l^{(s)})$ *tind uniform către momentele* M_l, *atunci* $\varphi^{(s)}(t)$ *tinde către* $\varphi(t)$ *uniform, în orice interval finit.*

In adevăr, seriile (3) și (4) fiind absolut și uniform convergente, vom putea scrie

$$\varphi(t) - \varphi^{(s)}(t) = \sum_0^\infty i^l \left[M_l - M_l^{(s)}\right] \frac{t^l}{l!}.$$

Dacă $s > S(\epsilon)$, ținând seamă de condiția din enunț, rezultă

$$|\varphi(t) - \varphi^{(s)}(t)| < \epsilon \sum \frac{|t|^l}{l!} = \epsilon e^{|t|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunând $|t| < t_0$ și luând un η pozitiv, arbitrar de mic, dacă punem

$$\epsilon = \eta e^{-t_0},$$

rezultă:

$$|\varphi(t) - \varphi^{(s)}(t)| < \eta,$$

dacă

$$|s| > S(\eta e^{-|t|})$$

oricare ar fi t, în modul mai mic decât t_0.

Să observăm că uniformitatea convergenței $M_l^{(s)} \longrightarrow M_l$, când s tinde către infinit este foarte restrictivă. Este suficient, de exemplu, să existe o constantă a pentru care

$$|M_l^{(s)} - M_l| < \epsilon a^l; \quad (a > 0).$$

Obținem același rezultat, întrucât

$$|\varphi(t) - \varphi^{(s)}(t)| \leq \epsilon \sum a^l \frac{t^l}{l!} = \epsilon e^{at}.$$

Pentru $|t| < t_0$ și $\epsilon = \eta e^{-at}$ avem

$$|\varphi(t) - \varphi^{(s)}(t)| < \eta$$

dacă

$$|s| > S(\eta e^{-at});$$

convergența este uniformă în intervalul $|t| < t_0$. Pentru a complecta teorema precedentă trebue să adaugăm încă alte două teoreme fundamentale a căror demonstrație generală cititorul o va găsi în tratatele de specialitate.

Teorema 1. *Dacă $F^{(s)}(x)$ este un șir de funcții de repartiție care tind către funcția de repartiție $F(x)$, funcțiile caracteristice respective $\varphi^{(s)}(t)$ tind către funcția $\varphi(t)$, corespunzătoare funcției de repartiție $F(x)$.*

Teorema 2. (Reciproca precedentei). *Dacă funcțiile caracteristice $\varphi^{(s)}(t)$ tind către funcția caracteristică $\varphi(t)$, funcțiile de repartiție corespunzătoare $F^{(s)}(x)$ tind către funcția de repartiție $F(x)$ corespunzătoare funcției $\varphi(t)$.*

8. Funcția caracteristică a sumelor de variabile independente

Să considerăm variabila discontinuă X care ia respectiv valorile $a_1, a_2, \ldots, a_m$ cu probabilitățile $p_1, p_2, \ldots, p_m$ $\left(\sum_{j=1}^{m} p_j = 1\right)$. Fie $f(t)$ funcția caracteristică a acestei variabile.

Prin definiție, avem

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m} p_j e^{a_j t_i}.$$

Din această relație se vede imediat că $f(t)$ este valoarea medie a variabilei e^{xti}. Putem deci scrie

$$f(t)=M(e^{xti}).$$

Să considerăm acum o altă variabilă Y, având funcția caracteristică $g(t)$.

Avem

$$g(t)=M(e^{yti}).$$

In baza celor de mai sus, dacă notăm cu $h(t)$ funcția caracteristică a sumei $x+y$, avem:

$$h(t)=M\ [e^{(x+y)\ ti}].$$

Dacă X și Y sunt independente, avem

$$h(t)=M\ [e^{(x+y)\ ti}]=M[e^{xti}\cdot e^{yti}]=M(e^{xti})\ M\ (e^{yti})=h(t)\,g(t).$$

Am demonstrat astfel următoarea teoremă importantă:

Funcția caracteristică a unei sume de două variabile independente este egală cu produsul funcțiilor caracteristice ale fiecărei variabile în parte.

PROBLEME

1. Dintr'o urnă în care sunt 10 bile albe și 5 negre se fac 6 extracții, punându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Să se reprezinte funcția de repartiție a variabilei care dă numărul de bile albe extrase.

2. Să se rezolve aceeași problemă în cazul în care nu se pune bila extrasă înapoi în urnă.

3. Se aruncă două zaruri. Se cere să se calculeze funcția de repartiție a sumei punctelor obținute.

4. Să se calculeze funcțiile caracteristice ale variabilelor din problemele precedente.

5. Dacă $f(t)$ este funcția caracteristică a variabilei ξ, să se demonstreze că funcția caracteristică a variabilei $a\xi+b$, unde a și b sunt două constante, este $e^{bit}f(at)$.

6. Se dau două urne A și B, care conțin bile albe în proporții cunoscute. Din urna A se scoate o bilă și se pune în urna B Din urna B efectuăm apoi 3 extracții succesive, punînd de fiecare dată bila înapoi în urnă. Notând cu 1 apariția unei bile albe și cu 0 apariția unei bile negre, să se calculeze funcția caracteristică corespunzătoare numărului de bile albe obținut în aceste patru extracții.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

URNA LUI BERNOULLI

1. Considerații generale

Să considerăm o serie de n probe independente, care dau naștere la două evenimente E_1 și E_2, cu probabilitățile respective p și q în fiecare probă $(p+q=1)$.

Aplicațiile calculului probabilităților ne conduc deseori la astfel de probe, dacă este vorba de un fenomen care se repetă de numeroase ori în condiții identice.

Să admitem, astfel, existența unei probabilități p_x ca un individ în vârstă de x ani să fie în viață la împlinirea vârstei de $x+1$ ani. Plecând dela o populație de N indivizi care trăiesc în condiții suficient de apropiate pentru ca să admită aceeași probabilitate de viață x, să ne punem problema studierii mortalității acestei populații. Ajungem la o serie de probe de tipul de mai sus, în fiecare probă evenimentul având aceeași probabilitate de a se verifica, probele fiind evident independente între ele.

Să considerăm o serie de piese executate de aceeași mașină și fie p probabilitatea ca una dintre ele să nu fie acceptabilă din punct de vedere tehnic. O succesiune de n piese, lucrate la această mașină în condiții identice, ne va conduce deasemenea la o serie de tipul de mai sus.

J. Bernoulli și-a propus să construiască o schemă simplă, care să servească drept model pentru toate cazurile asemănătoare întâlnite în natură. El a plecat dela o urnă în care se află A bile albe și N bile negre. Din această urnă se efectuează un șir de extracții succesive punând, după fiecare extracție, bila extrasă înapoi în urnă. In modul acesta, compoziția urnei rămâne aceeași și probabilitatea de a scoate o bilă albă este:

$$p=\frac{A}{A+N} \quad \text{și} \quad q=\frac{N}{A+N}.$$

Extracțiile succesive, după cum rezultă chiar din modul în care sunt executate, sunt independente între ele.

Studiul schemei probabilistice date de urna lui Bernoulli prezintă un interes deosebit, dat fiind numărul imens de fenomene care pot fi studiate, din punct de vedere probabilistic, cu ajutorul ei.

Se poate afirma, fără exagerare, că statistica matematică s'a constituit în întregime ca disciplină matematică de sine stătătoare pe baza schemei lui Bernoulli și a consecințelor ei.

2. Probabilitatea P_α

Numărul de bile albe apărute în n extracții succesive se găsește cuprins între 0 și n incluziv. Probabilitățile cu care sunt luate fiecare dintre aceste valori le cunoaștem, și anume pentru valoarea α probabilitatea este

$$P_\alpha = C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha}.$$

Cea mai mare dintre probabilitățile P_α, când α ia toate valorile ntregi între 0 și n, corespunde unei valori λ care, față de celelalte valori, prezintă cea mai mare șansă să apară. Din această cauză, λ se numește valoarea cea mai probabilă.

Din relația precedentă, deducem

$$P_{\alpha-1} = C_n^{\alpha-1} p^{\alpha-1} q^{n-\alpha+1}.$$

Prin împărțire, rezultă

$$\frac{P_\alpha}{P_{\alpha-1}} = \frac{C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha}}{C_n^{\alpha-1} p^{\alpha-1} q^{n-\alpha+1}} = \frac{n-\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{p}{q}.$$

Punând condiția ca acest raport să fie mai mare decât 1, obținem

$$\frac{n-\alpha+1}{\alpha} \frac{p}{q} \geq 1,$$

$$\alpha \leq np+p.$$

Rezultă că, atâta timp cât α este mai mic decât $np+p$, șirul P_α crește mereu. Invers, dacă punem condiția ca raportul de mai sus să fie mai mic decât 1, reiese că atunci când

$$\alpha > np+p$$

șirul P_α începe să descrească.

Scanned with OKEN Scanner

In general, $np+p$ nu este un număr întreg. Din cele de mai sus rezultă, deci, că λ este întregul cel mai apropiat de $np+p$ care îndeplineşte condiţia $\lambda \leq np+p$.

Mai precis

$$np-q \leq \lambda < np+p.$$

Găsim astfel pentru λ o valoare unică, determinată prin aceste inegalităţi.

Intr'un singur caz găsim două valori, şi anume când $np+p$ este un număr întreg. In acest caz, şi $np-q$ este un întreg, deci

$$P_{np-q} = P_{np+p}.$$

Ambele valori de mai sus corespund unui maxim.

Prin urmare, valoarea cea mai probabilă este cuprinsă între $(np-q)$ şi $(np+p)$ şi se apropie foarte mult de valoarea medie, care, după cum am văzut, este np. Această apropiere nu corespunde, însă, unei proprietăţi generale a variabilelor, după cum s'ar putea crede din studiul urnei lui Bernoulli.

3. Legea lui Laplace

Am arătat că probabilitatea ca din n extracţii succesive să obţinem α bile albe este dată de expresia

$$P_\alpha = C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha} = \frac{n!}{\alpha!\,(n-\alpha)!} p^\alpha q^{n-\alpha}. \qquad (1)$$

Pentru valorile mici ale lui n, această expresie este în general, lipsită de interes. Aplicaţiile ei cele mai importante sunt date pentru valorile mari ale lui n, adică în cazul colectivelor formate dintr'un număr mare de fenomene aleatorii identice.

Insă, pentru valorile mari date lui n, un calcul numeric direct al lui P_α este practic imposibil. Pentru a ne convinge de exactitatea acestei afirmaţii, să considerăm un colectiv format din 10 000 fenomene; avem, în acest caz, $n = 10\,000$ şi, pentru a evalua probabilitatea P_α, este necesar să calculăm valoarea numerică a lui 10 000! efectuând un număr imens de operaţii.

Această greutate se înlătură prin folosirea formulei asimptotice a lui Moivre-Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

In mod riguros, formula lui Moivre-Stirling trebue scrisă sub forma

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\ [1+\theta(n)],$$

unde $\theta(n)$ tinde către zero, când n creşte necontenit. Calcule pe care nu le mai reproducem aici arată că $\theta(n)$ este mai mic în valoare absolută decât $\frac{1}{100}$. Pentru aplicaţiile numerice pe care le vom da, influenţa lui $\theta(n)$ este neglijabilă, deaceea folosim formula lui Moivre-Stirling sub prima ei formă.

Probabilitatea ca din n extracţii să obţinem α bile albe este

$$P_{n,\alpha} = \frac{n!}{\alpha!(n-k)!} p^{\alpha} q^{n-\alpha}.$$

Am arătat că valoarea medie a numărului α este np. Să introducem abaterea numărului α dela valoarea lui medie np

$$l = \alpha - np.$$

Inlocuind pe α cu $1+np$ şi notând pe $P_{n,\alpha}$ cu $P_{n,l}$ formula de mai sus devine

$$P_{n,l} = \frac{n!}{(l+np)!\ (nq-l)!} p^{l+np} q^{nq-l}.$$

Folosind acum formula lui Moivre-Stirling şi efectuând simplificările necesare, ajungem la formula

$$P_{n,l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}\left(1+\frac{l}{np}\right)^{l+np+1/2}\left(1-\frac{l}{nq}\right)^{nq-l+1/2}}.$$

Notăm

$$N = \left(1+\frac{l}{np}\right)^{l+np+1/2}\left(1-\frac{l}{nq}\right)^{nq-l+1/2}.$$

Pentru evaluarea asimptotică a lui N, vom aplica logaritmii şi vom avea

$$\log N = \left(l+np+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{l}{np}\right) + \left(nq-l+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{l}{nq}\right).$$

Ne propunem să evaluăm asimptotic pe $P_{n,\alpha}$ pentru valorile lui l îndeplinind condiţia $|l| < A\sqrt{n}$, unde A este un număr pozitiv dat.

In acest caz

$$\frac{|l|}{np} < 1, \quad \frac{|l|}{nq} < 1$$

pentru valorile lui n suficient de mari.

Avem, deci, desvoltările în serie

$$\log\left(1+\frac{l}{np}\right)=\frac{l}{np}-\frac{l^2}{2n^2p^2}+\frac{l^3}{3n^3p^3}-\ldots$$

$$\log\left(1-\frac{l}{nq}\right)=-\frac{l}{nq}-\frac{l^2}{2n^2q^2}-\frac{l^3}{3n^3q^3}-\ldots$$

Introducându-le în relaţia care dă pe $\log N$ şi ţinând seama de faptul că $|l|<A\sqrt{n}$, obţinem următoarea evaluare asimptotică

$$\log N=-\frac{l^2}{2npq}+\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

în care notăm cu $\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ o funcţie de n care tinde către zero când n tinde către infinit.

Pentru valorile destul de mari ale lui n, putem deci scrie

$$N\approx e^{-\frac{l^2}{2npq}}$$

şi, prin urmare

$$P_{n,l}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\,l^{-\frac{l^2}{2npq}}. \qquad (2)$$

O lege de probabilitate de această formă se numeşte lege normală de probabilitate.

Importanţa ei pentru calculul probabilităţilor a fost pusă în evidenţă de Laplace şi Gauss. Pentru acest motiv, este cunoscută sub numele de legea de probabilitate a lui Gauss sau de legea de probabilitate a lui Laplace. Deoarece meritul priorităţii în această chestiune îl are indiscutabil Laplace, considerăm că este just să o numim legea normală de probabilitate a lui Laplace.

Probabilitatea ca să obţinem abaterea l este dată, după cum am văzut, de valoarea aproximată (2).

Este util de observat că, dacă notăm

$$\mu=\sqrt{npq},$$

formula de mai sus devine

$$P_{n,l}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\,e^{-\frac{l^2}{2\mu^2}}, \qquad (3)$$

formulă care ne arată că probabilitatea de a obţine o abatere l se exprimă numai în raport cu l şi μ. Acest rezultat dovedeşte utilitatea stabilirii formulei asimptotice cu ajutorul formulei lui Moivre-Stirling, deoarece prin acest procedeu se ajunge nu numai la

Scanned with OKEN Scanner

posibilitatea evaluării probabilității cu mai puține calcule, dar și la formule simetrice, care ne conduc la unele cercetări teoretice.

Astfel, examinând formulele (2) și (3), putem să tragem concluzia că sunt inacceptabile. În adevăr, conform acestor formule,

$$P_{n,l} = P_{n,-l},$$

adică probabilitatea a două abateri egale și de semn contrar este aceeași. Ne așteptăm la un asemenea fapt numai în cazul $p = q = \frac{1}{2}$. Când această simetrie nu există, adică atunci când $p \neq q$, este evident că probabilitățile a două abateri egale și de același semn nu pot fi egale. Cu toate acestea, constatăm că, atunci când numărul experiențelor crește, distribuția probabilității $P_{n,l}$ tinde să devină simetrică față de valoarea medie $\alpha = np$.

Pentru a ne convinge, dăm mai jos tabela valorilor $P_{n,l}$ calculate în mod direct pentru $p = \frac{1}{10}$, $q = \frac{9}{10}$, deci, într'un caz în care, în mod sensibil, avem $p \neq q$.

Tabela conține valorile 10 000 $P_{n,l}$.

	$n=5$	$n=10$	$n=20$	$n=50$	$n=100$
0	5 905	3 487	1 216	51	—
1	3 281	3 874	2 702	286	3
2	729	1 937	2 852	779	16
3	81	574	1 901	1 386	59
4	4	112	898	1 809	159
5	—	14	319	1 849	338
6	—	2	89	1 541	596
7	—	—	20	1 076	889
8	—	—	3	643	1 148
9	—	—	—	333	1 304
10	—	—	—	155	1 319
11	—	—	—	61	1 199
12	—	—	—	22	988
13	—	—	—	7	743
14	—	—	—	2	513
15	—	—	—	—	327
16	—	—	—	—	193
17	—	—	—	—	106
18	—	—	—	—	54
19	—	—	—	—	26
20	—	—	—	—	12
21	—	—	—	—	5
22	—	—	—	—	2
23	—	—	—	—	1

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede, pentru $n=5$, distribuția este asimetrică. Din cauză că p este foarte mic față de q, probabilitățile ca evenimentul să nu se verifice sunt mai mari decât probabilitățile ca el să se verifice, adică, probabilitatea ca să obținem de 5 ori la rând valoarea 0 este 0, 5905; ea este deci mai mare decât restul probabilităților. Pe măsură însă ce n crește, tabela probabilităților începe să devină simetrică. Astfel, pentru $n=100$, constatăm o simetrie destul de pronunțată față de valoarea medie $np=10$.

Prin urmare, calculul direct confirmă formula (3), care nu este adevărată decât pentru valorile mari ale lui n.

Pentru aplicarea formulei (3) este deci necesar să cunoaștem eroarea pe care o facem atunci când o substituim valorii exacte. Această eroare nu este greu de calculat. Ea se obține tot din formula lui Moivre-Stirling, ținând seama și de restul respectiv:

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(1+\epsilon_n)$$

unde

$$0<\epsilon_n<\frac{1}{11n}.$$

Fie $P_{n,\alpha}$ valoarea probabilității ca din n extracții să obținem α bile albe, calculată direct cu formula

$$P_{n,\alpha}=\frac{n!}{\alpha!\,(n-\alpha)!}p^{\alpha}q^{n-\alpha}$$

și $\overline{P_{n,\alpha}}$ valoarea aproximată a aceleiași probabilități, calculată cu formula (3).

Notăm cu

$$\lambda_n=\frac{P_{n,\alpha}-\overline{P_{n,\alpha}}}{P_{n,\alpha}}$$

eroarea relativă care se obține înlocuind pe $M_{n,\alpha}$ cu $\overline{P_{n,\alpha}}$.

Efectuându-se în același mod, ca mai sus, calculul valorii apropiate a lui $P_{n,\alpha}$ cu formula lui Moivre-Stirling, se arată că

$$\lambda_n<\frac{3\,|q-p|}{\sqrt{npq}}$$

dacă

$$|l|\leq 3\sqrt{npq}.$$

4. Probabilitatea ca abaterea să fie cuprinsă într'un interval

Formula (3) ne dă probabilitatea de a obține o abatere l. Această probabilitate este mică și devine cu atât mai mică, cu cât crește numărul probelor. Pe de altă parte, în aplicații, nu ne interesează decât rareori probabilitatea de a obține o anumită abatere; de cele mai multe ori ne interesează probabilitatea de a obține o abatere cuprinsă între două limite a și b.

Dacă notăm cu $P_n(-\lambda, \lambda)$ probabilitatea de a obține o abatere cuprinsă între $-\lambda$ și λ, și aplicăm proprietatea de adunare a probabilităților pentru evenimentele incompatibile, obținem

$$P_n(-\lambda, \lambda) = P_{n,-\lambda} + P_{n,-\lambda+1} + \cdots + P_{n,\lambda-1} + P_{n,\lambda}.$$

Să notăm în formula (3)

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}.$$

Obținem pentru $P_{n,l}$ valoarea

$$P_{n,l} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2h^2}; \quad \left(h = \frac{1}{\sqrt{2npq}}\right).$$

Dacă în formula precedentă înlocuim pe $P_{n,l}$ cu această ultimă valoare, se vede că pentru a obține pe $P_n(-\lambda, \lambda)$ trebue să considerăm valorile funcției

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

în punctele $(-\lambda, -\lambda+1, \ldots, \lambda-1, \lambda)$ și să adunăm aceste valori. Astfel, dacă notăm cu y_x valoarea acestei funcții în punctul x, avem

$$P_n(-\lambda, \lambda) = y_{-\lambda} + y_{-\lambda+1} + \cdots + y_{\lambda-1} + y_\lambda.$$

Aplicând o cunoscută formulă de cuadratură mecanică, aria determinată de curba $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$, axa Ox și ordonatele $x = -\lambda$, $x = \lambda$ este dată în mod aproximativ de relația

$$A = y_{-\lambda} + y_{-\lambda+1} + \ldots + y_{\lambda-1} + y_\lambda - \frac{1}{2}(y_{-\lambda} + y_\lambda).$$

Pe de altă parte

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-h^2x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-h^2x^2} dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinând seama de toate aceste egalităţi, obţinem

$$P_n(-\lambda, \lambda) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-h^2x^2} dx + \frac{1}{2}(P_{n,-\lambda} + P_{n,\lambda}).$$

Ultimul termen poate fi neglijat faţă de primul, când n este destul de mare. In aplicaţiile practice, el este neglijat.

Se ajunge astfel la formula fundamentală

$$P_n(-\lambda, \lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi npq}} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2npq}} dx. \tag{4}$$

Probabilitatea de a obţine o abatere absolută cuprinsă între $-\lambda$ şi $-\lambda$ este dată deci de integrala de mai sus.

Dacă trecem dela abaterea absolută la abaterea relativă

$$\xi = \frac{\lambda}{\sqrt{2npq}}$$

făcând în integrala de mai sus substituţia

$$y = \frac{x}{\sqrt{2npq}}$$

obţinem

$$P_n(-\xi, \xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2} dx. \tag{5}$$

Probabilitatea de a obţine o abatere relativă cuprinsă între $-\xi$ şi ξ este dată de formula de mai sus.

Constatăm faptul remarcabil că valoarea acestei integrale nu depinde decât de ξ.

Pentru calculul ei, s'a întocmit o tabelă conţinând valorile funcţiei

$$H(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2} dx$$

pentru diferitele valori date lui ξ. O asemenea tabelă se găseşte la sfârşitul cărţii.

Ajungând la acest rezultat, ne punem în mod firesc două întrebări. Prima se referă la condiţiile în care formulele (4) şi (5) sunt aplicabile fără a comite erori care nu se pot neglija. A doua porneşte dela expresia simplă pe care am găsit-o pentru probabilitatea căutată. Cu cât n creşte, cu atât gradul de exactitate al formulelor

Scanned with OKEN Scanner

aproximate (4) şi (5) creşte, astfel încât este natural să ne întrebăm dacă, în mod riguros

$$\lim_{n\to\infty} P_n(-\xi, \xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2} dx. \qquad (6)$$

Vom arăta că, în adevăr, această proprietate, denumită *teorema centrală a teoriei probabilităţilor*, este exactă.

Fără a intra în amănunte, menţionăm referitor la prima întrebare că, pentru $\xi < 3$ eroarea relativă care se obţine folosind formula (5) este mai mică în valoare absolută decât $\frac{5}{npq}$. Acest rezultat la care ajungem folosind formula lui Moivre-Stirling ne permite să stabilim condiţiile de aplicare a formulei (5).

Ne vom ocupa mai mult de egalitatea (6). In primul rând, pentrucă ne arată motivul care ne permite să folosim formulele aproximate (4) şi (5) şi, în al doilea rând, pentrucă stă la baza unuia dintre cele mai importante capitole ale calculului probabilităţii.

5. Demonstrarea teoremei centrale a teoriei probabilităţilor cu formula lui Moivre-Stirling.

Proprietatea de limită (6) va fi demonstrată mai jos în mod riguros pe alte căi, care prezintă avantajul generalizării ei la o mare categorie de variabile aleatorii.

Vom indica în mod sumar o demonstraţie bazată pe formula de aproximare a lui Moivre-Stirling. Această demonstraţie nu este aplicabilă decât la urna lui Bernoulli, însă are avantajul că este directă.

Pornim din nou dela probabilitatea ca din n extracţii succesive să obţinem α bile albe.

$$P_{n,\alpha} = \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!} p^{\alpha} q^{n-\alpha}.$$

Inainte de a trece la aplicarea formulei lui Moivre-Stirling, am văzut că este util să introducem abaterea, punând $\alpha = np + l$.

Folosim acelaşi procedeu de calcul, notând însă:

$$\alpha = np + x\sqrt{2npq} \qquad (7)$$

pentru a pune în evidenţă abaterea relativă

$$x = \frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}.$$

Aplicând în același mod formula lui Moivre-Stirling, să arătăm că probabilitatea $P_{n,\alpha}$ se poate scrie sub forma:

$$P_{n,\alpha}=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2npq}}[1+h(n,\alpha)] \tag{8}$$

valabilă în ipoteza că x are o valoare cuprinsă într'un interval finit, independent de n.

Formula (7) diferă de formula (2) prin faptul că se introduce termenul $h(n,\alpha)$, care tinde uniform către zero, când n și α tind către infinit, iar x în intervalul finit sus menționat.

Să evaluăm acum probabilitatea

$$P_n(-\lambda,\lambda)$$

de a obține

$$-\lambda\sqrt{2npq}<\alpha-np<\lambda\sqrt{2npq}; \tag{9}$$

α ia valori întregi, dela 0 la n, verificând inegalitățile (9). Fie ξ și η respectiv cea mai mică și cea mai mare valoare a lui α care verifică aceste inegalități.

In baza proprietății de adunare a probabilităților evenimentelor incompatibile, obținem

$$P_n(-\lambda,\lambda)=\sum_{\alpha=\xi}^{\eta}P_{n,\alpha}.$$

Să mai observăm că din egalitatea (7) reiese că, pentru fiecare valoare a lui α, rezultă o valoare bine determinată a lui x, pe care să o notăm cu $x(\alpha)$. Ținând seama și de (9), obținem

$$P_n(-\lambda,\lambda)=\sum_{\xi}^{\eta}\frac{e^{-x(\alpha)}}{\sqrt{2npq}}[1+h(n,\alpha)].$$

Fie $M(n)$ cea mai mare dintre valorile absolute ale valorilor $h(n,\alpha)$, pentru α cuprins între ξ și η incluziv.

Formula anterioară se poate scrie

$$P_n(-\lambda,\lambda)=S_n[1+h(n)]$$

unde

$$h(n)<M(n)$$

iar

$$S_n=\sum_{\alpha=\xi}^{\eta}\frac{e^{-x^2(\alpha)}}{\sqrt{2\pi npq}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinând seama de valorile lui $x(\alpha)$, S_n se mai poate scrie

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\alpha=\xi}^{\eta} e^{-x^2(\alpha)} [x(\alpha+1) - x(\alpha)].$$

In baza definiţiei integralei definite, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-x^2} dx$$

deoarece $x(\alpha)$, pentru $\alpha=\xi$ şi $\alpha=\eta$, ia respectiv valorile $-\lambda, \lambda$.

Pe de altă parte, am arătat că, dacă λ ia o valoare finită, $M(n)$ converge uniform către zero.

Egalitatea (6) este deci dovedită.

Formulele pe care le-am stabilit servesc la numeroase aplicaţii.

Formula (6) ne arată că

$$\lim_{n\to\infty} P_n(-\xi\sqrt{2npq} < \alpha - np < \xi\sqrt{2npq}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2} dx;$$

deci pentru a calcula probabilitatea inegalităţii

$$-\xi\sqrt{2npq} < \alpha - np < \xi\sqrt{2npq}$$

pentru valorile mari ale lui n putem să folosim funcţia H.

Valoarea acestei probabilităţi este egală cu aria delimitată de axa Ox, de dreptele $x=-\xi$, $x=\xi$ şi de curba

$$y = e^{-x^2}.$$

Formula (4) ne arată că în cazul abaterilor absolute ajungem la formule de tipul

$$P_n(-\lambda\ \lambda) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-h^2 x^2} dx,$$

unde

$$h = \frac{1}{\sqrt{2npq}}.$$

De data aceasta, valoarea probabilităţii $P_n(-\lambda, \lambda)$ este dată de aria delimitată de axa Ox, de dreptele $x=-\lambda$; $x=\lambda$ şi de curba

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}. \qquad (10)$$

Scanned with OKEN Scanner

Curba de probabilitate (10) depinde de un singur parametru h. Ea este simetrică față de axa Oy, are un singur maxim pe această axă în punctul $\left(0, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)$ și se apropie asimptotic de axa Ox.

Comparând două curbe de probabilitate

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}; \quad y = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{k^2 x^2}$$

constatăm că dacă $h > k$, prima curbă se înalță mai sus pe axa Ox și se apropie mai mult de axa Ox pentru valorile îndepărtate de origine.

Deoarece probabilitățile respective sunt egale cu ariile pe care le-am arătat mai sus, rezultă că abaterile mici sunt mai probabile pentru prima curbă decât pentru a doua. Deaceea, parametrul h se numește precizie, după numele care i s'a dat în teoria erorilor.

Pentru a arăta cum se aplică formulele de mai sus, vom da mai multe exemple.

Exemplul 1. La extragerea repetată a 10 000 bile dintr'o urnă cu același număr de bile albe și negre, s'au obținut 5050 bile albe și 4950 bile negre. Să se determine probabilitatea ca la repetarea experienței să nu obținem o abatere mai mare.

Probabilitatea căutată este dată de formula:

$$P[-\xi\sqrt{2npq} < \alpha - np < \xi\sqrt{2npq}] \approx H(\xi).$$

Din datele problemei rezultă

$$\alpha = 5050; \quad n = 10\,000; \quad p = \frac{1}{2}, \text{ deci } \alpha - np = 50,$$

$$\xi = \frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}} = \frac{50}{\sqrt{2 \cdot 10\,000 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{50}{10\sqrt{50}} = 0{,}70.$$

Din tabela care dă valorile funcției $H(\xi)$ aflăm valoarea

$$H(0{,}70) = 0{,}67.$$

Prin urmare probabilitatea căutată este 0,67.

Exemplul 2. Știind că din 1000 piese 30 sunt date la rebut să se determine probabilitatea ca, din 6000 piese fabricate, numărul celor bune să fie cuprins între 5780 și 5860.

$$n = 6000; \quad p = \frac{97}{100}; \quad q = \frac{3}{100}; \quad \alpha - np = 40;$$

$$\xi = \frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}} = \frac{40}{\sqrt{2 \cdot 6000 \cdot \frac{97}{100} \cdot \frac{3}{100}}} \approx 2{,}15.$$

Scanned with OKEN Scanner

Probabilitatea căutată este deci

$$P = H(\xi) = H(2,15) = 0,99764.$$

Exemplul 3. Statisticianul Weldon a aruncat de 26 306 ori câte 12 zaruri deodată şi a notat de câte ori a ieşit una dintre feţele 5 sau 6. La fiecare probă, variabila aleatorie constând în apariţia uneia dintre feţele 5 sau 6 putea, prin urmare, să ia una dintre valorile 0, 1, 2 ,..., 12. Valorile luate pentru această variabilă sunt următoarele:

1	2	3
Valori luate	Frecvenţa corespunzătoare	Col. 1×Col. 2. Valori luate × frecvenţa corespunzătoare
0	185	0
1	1 149	1 149
2	3 265	6 530
3	5 475	16 425
4	6 114	24 456
5	5 194	25 970
6	3 067	18 402
7	1 331	9 317
8	403	3 224
9	105	945
10	14	140
11	4	44
12	0	0
	26 306	106 602

De exemplu, în 185 aruncări a câte 12 zaruri nu s'a obţinut niciodată faţa *5* sau *6*, în 1 149 aruncări s'a obţinut numai la un singur zar faţa *5* sau *6*, etc.

Ne întrebăm dacă se poate admite că zarurile sunt perfect construite.

Aceasta echivalează cu a admite că probabilitatea de a ieşi la o aruncare de zar una dintre feţe este egală cu $\frac{1}{6}$.

Probalitatea ca la o aruncare a zarului să iasă una dintre feţele *5* sau *6* este egală cu $\frac{1}{3}$.

O verificare a ipotezei zarului perfect se poate face după cum urmează:

In total s'au făcut $26\,306 \cdot 12 = 315\,672$ aruncări de zar. Numărul de apariţii al feţelor *5* sau *6* este dat în coloana 3, adică 106 602 cazuri.

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci:

$$\alpha = 106\,602; \quad n = 315\,672; \quad p = \frac{1}{3},$$

și introducând aceste valori în formulă, obținem:

$$P\left[-3\sqrt{2npq} < \alpha - np < 3\sqrt{2npq}\right] \approx 4(3) = 0{,}99998,$$

sau

$$P\left[|\alpha - np| > 3\sqrt{2npq}\right] \approx 1 - H(3) = 0{,}00002.$$

Cu datele noastre obținem

$$P\left[\left|\alpha - \frac{315\,672}{3}\right| > 3\sqrt{2 \cdot 315\,672 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}\right] \approx 0{,}00002,$$

$$P\left[|\alpha - 105\,224| > 1\,125\right] \approx 0{,}00002.$$

Insă

$$\alpha - 105\,224 = 1\,378 > 1\,125.$$

Prin urmare, dacă admitem că probabilitatea apariției unei fețe este egală cu $\frac{1}{6}$, înseamnă că rezultatul experienței noastre trebue să se producă cu o probabilitate egală cu 0,00002.

Această probabilitate este prea mică pentru ca să putem admite că fenomenul corespunzător s'a realizat dintr'o singură probă. Deaceea tragem concluzia că zarul nu este perfect construit și, prin urmare, nu putem admite că, pentru acest zar, probabilitatea apariției uneia dintre fețe este egală cu $\frac{1}{3}$.

Ipoteza pusă este inadmisibilă, nefiind confirmată de experiență, în sensul pe care l-am arătat.

6. O altă demonstrație a teoremei centrale

Folosind funcția caracteristică, putem demonstra în mod simplu și riguros că abaterile relative satisfac la limită legea normală a lui Laplace.

Pentru aceasta, să considerăm funcția caracteristică a variabilei reduse

$$\xi = \frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}.$$

Am văzut, însă, că abaterea absolută poate avea forma

$$\alpha - np = (x_1 - p) + (x_2 - p) + \cdots + (x_k - p) + \cdots + (x_n - p)$$

unde x_k reprezintă variabila aleatorie care ne dă numărul de bile albe ieşite în extracţiile de rangul k.

x_k poate lua, prin urmare, valoarea 1 sau 0, cu probabilităţile respective p şi q.

Rezultă că $x_k - p$ poate lua, cu probabilităţile p şi q, respectiv valorile $1-p=q$ şi $-p$.

Funcţia caracteristică a variabilei $x_k - p$ este deci

$$pe^{qti} + qe^{-pti}.$$

Am demonstrat, însă, tecrema că funcţia caracteristică a unei sume de variabile independente este egală cu produsul funcţiilor caracteristice ale fiecărei variabile în parte.

Funcţia caracteristică a abaterii absolute $\alpha - np$ este deci

$$(pe^{qti} + qe^{-pti})^n.$$

Observăm acum că, pentru a obţine funcţia caracteristică a variabilei reduse ξ, este suficient să înlocuim pe t cu

$$\frac{t}{\sqrt{npq}}.$$

Notând cu $F_n(t)$ funcţia caracteristică a variabilei

$$\xi = \frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}},$$

obţinem

$$F_n(t) = \left(pe^{\frac{qti}{\sqrt{npq}}} + qe^{-\frac{pti}{\sqrt{npq}}}\right)^n.$$

Folosind cunoscuta proprietate a desvoltării în serie a lui e^{ix} după puterile lui n, avem

$$pe^{\frac{qti}{\sqrt{npq}}} = p + \frac{pqti}{\sqrt{npq}} - \frac{pq^2t^2}{2npq} + \theta' \frac{pq^3t^3}{3(npq)^{3/2}},$$

$$qe^{\frac{-pti}{\sqrt{npq}}} = q - \frac{pqti}{\sqrt{npq}} - \frac{p^2qt^2}{2npq} + \theta'' \frac{p^3qt^3}{3(npq)^{3/2}},$$

unde θ' şi θ'' sunt două numere mai mici în modul decât 1.

Scanned with OKEN Scanner

Prin adunare, obținem

$$pe^{\frac{qti}{\sqrt{npq}}} + qe^{-\frac{pti}{\sqrt{npq}}} = 1 - \frac{t^2}{2n} + \theta \frac{t^3}{(npq)^{3/2}}$$

θ fiind deasemenea un număr mai mic în modul decât 1.

Putem, deci, scrie

$$F_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n} + \theta \frac{t^3}{(npq)^{3/2}}\right)^n,$$

de unde rezultă proprietatea de limită

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Am văzut că funcția caracteristică a legii limită a lui Laplace este $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Pe de altă parte, am arătat că, dacă avem un șir de funcții caracteristice care tind uniform către o funcție caracteristică, legile de repartiție respective tind și ele către legea de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice limită.

Teorema este deci demonstrată.

7. Teorema lui Liapunov

Teorema demonstrată mai sus a fost generalizată de Liapunov. Fie

$$x_{(n)} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

un șir de variabile format cu ajutorul variabilelor independente din șirul $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Presupunem că pentru orice k există valoarea medie și valoarea medie pătratică a variabilei x_k. Notăm:

$$M(x_k) = m_k, \quad M(x_k - m_k)^2 = \mu_k, \quad M(X_k - m_k) = \rho_k^3.$$

Presupunem deasemenea că momentul de ordinul al treilea al valorii absolute a variabilei $X_k - m_k$, pe care l-am notat ρ_k^3, există și este finit, pentru orice k.

In aceste condiții, dacă însemnăm

$$m_{(n)} = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$
$$\rho_{(n)}^3 = \rho_1^3 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_n^3$$
$$\mu_{(n)}^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2$$

Scanned with OKEN Scanner

şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_{(n)}}{\mu_{(n)}} \to 0.$$

Liapunov a demonstrat că şirul $x_{(n)}$ tinde la limită către legea normală a lui Laplace. Aşa cum am mai arătat, dacă însemnăm prin $f_k(t)$ funcţia caracteristică a variabilei $x_k - m_k$, aceasta se poate scrie sub forma:

$$f_k(t) = M[e^{it(x_k - m_k)}] = 1 - \frac{1}{2}\mu_k^2 t^2 + \frac{1}{6}\theta\rho_k^3 t^3,$$

unde θ este un număr mai mic în valoare absolută decât 1.

$$f_k\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{\mu_k^2}{\mu_{(n)}^2} t^2 + \frac{1}{6}\theta\frac{\rho_k^3}{\mu_{(n)}^3} t^3$$

$$\log f_k\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right) = \log[1 + y],$$

unde am notat

$$y = -\frac{\sigma_k^2 t^2}{2\sigma^2} + \theta\frac{\rho_k^3 t^3}{6\sigma^3}.$$

Pe de altă parte:

$$\frac{\rho_k}{\mu_{(n)}} < \frac{\rho_{(n)}}{\mu_{(n)}} < 1$$

conform condiţiei puse. Deasemenea, rezultă dintr'o proprietate generală a momentelor, pe care am demonstrat-o la capitolul respectiv, că avem $\mu_k \leqq \rho_k$.

Aceasta înseamnă că putem scrie pe y sub forma

$$y = \theta\frac{\rho_k^2}{\mu_{(n)}^2}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{6}\right] \qquad |\theta| < 1.$$

Pentru $n \to \infty$, conform condiţiei lui Liapunov, $\frac{\rho_k}{\mu_{(n)}}$ tinde către zero. Putem alege atunci pe n destul de mare, ca să avem $|y| < \frac{1}{2}$.

Însă:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots = y - \frac{y^2}{2}\left[1 - \frac{2}{3}y + \frac{2}{4}y^2 - \cdots\right] =$$

$$= y + \frac{1}{2}\theta y^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = y + \theta y^2.$$

Prin urmare

$$\log f_k\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right) = -\frac{\sigma_k^2}{\mu_{(n)}^2}\frac{t^2}{2} + \theta\frac{\rho_k^3}{\mu_{(n)}^3}\left[\frac{1}{6}|t|^3 + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}|t|^3\right)^2\right].$$

Dacă notăm prin $F_n(t)$ funcţia caracteristică a variabilei $x_{(n)} - m_{(n)}$, avem:

$$F_n(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \ldots f_n(t),$$

şi deci

$$\log F_n\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right) = \log f_1\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right) + \log f_2\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right) + \cdots + \log f_n\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right)$$

$$\log F_n\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right) = -\frac{t^2}{2} + \theta\frac{\rho_{(n)}^3}{\mu_{(n)}^3}\left[\frac{1}{6}|t|^3 + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}|t|^3\right)^2\right].$$

Când n tinde către ∞, în baza condiţiei lui Liapunov rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \log F_n\left(\frac{t}{\mu_{(n)}}\right) = -\frac{t^2}{2}.$$

Funcţia caracteristică tinzând către funcţia caracteristică a legii normale a lui Laplace, teorema este demonstrată.

PROBLEME

1. Notând cu μ_k valoarea medie de ordinul k a abaterii $\alpha - np$, să se arate că

$$\mu_2 = npq;$$
$$\mu_3 = npq(q-p);$$
$$\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq).$$

2. Se aruncă un zar de 10 000 ori. Să se găsească probabilitatea inegalităţii

$$\left|\frac{\alpha}{10^4} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}$$

α fiind numărul de apariţii ale feţei 6.

3. Să se determine numărul minim de aruncări ale unui zar pentru ca probabilitatea inegalităţii

$$\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{1\,000}$$

să fie mai mare decât 0,99.

4. In regiunea A sunt 35 311 lucrători, dintre care 11 721 în vârstă de peste 35 ani. In regiunea B sunt 21 812 lucrători, dintre care 4 032 în vârstă de peste 35 ani.

Scanned with OKEN Scanner

Este această diferență întâmplătoare ?

5. Într'o urnă sunt A bile albe și B bile negre. Se fac din urnă n extracții succesive, fără a pune bilele extrase înapoi în urnă. Se notează $p=\frac{A}{A+B}$; $q=\frac{B}{A+B}$; $N=A+B$. Să se arate că probabilitatea de a obține α bile albe este egală din punct de vedere asimptotic cu

$$\frac{1}{\sqrt{2npq\left(1-\frac{n}{N}\right)}}\, e^{-\frac{x^2}{2npq\left(1-\frac{n}{N}\right)}},$$

unde am notat prin x abaterea $\alpha-np$, egalitatea fiind adevărată pentru $|x|<a\sqrt{n}$; $N-n<b\sqrt{n}$; a și b fiind două constante oarecare.

6. S'au examinat adresele la 10% din scrisorile trimise de un oficiu poștal și s'a constatat că dintre acestea 4 523 sunt locale și 9 247 sunt trimise în alte localități. Să se determine cu o probabilitate egală cu 0,95 limitele în care variază numărul scrisorilor locale și al celor trimise în alte localități, pentru totalitatea scrisorilor.

7. Să se rezolve problema precedentă în ipoteza că alegerea la întâmplare a grupului de 10% scrisori se face punându-se toate scrisorile într'o cutie, din care se scot succesiv scrisorile, punându-se de fiecare dată scrisoarea înapoi în cutie.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

LEGEA EVENIMENTELOR RARE

1. Formula lui Poisson

Să considerăm urma lui Bernoulli, cu probabilitatea p de a scoate o bilă albă şi q de a extrage o bilă neagră.

Am arătat că probabilitatea de a obţine α bile albe din n extracţii succesive este

$$P_{n,\alpha} = C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha}. \tag{1}$$

Aplicând formula lui Moivre-Stirling, am văzut că probabilitatea (1) poate fi pusă, din punct de vedere asimptotic, sub o altă formă, de tipul legii exponenţiale de probabilitate a lui Laplace. Aplicarea formulei lui Moivre-Stirling este însă legată de anumite condiţii, care nu sunt totdeauna îndeplinite. De exemplu, dacă p este foarte mic şi n destul de mare ca să avem

$$np = a, \tag{2}$$

unde a este o constantă, se poate uşor arăta că probabilitatea (1) poate fi pusă, din punct de vedere asimptotic, sub o altă formă.

Avem

$$P_{n,\alpha} = \frac{n(n-1)\dots(n-\alpha+1)}{\alpha!} p^\alpha q^{n-\alpha}.$$

Inlocuind pe p prin valoarea rezultată din (2), obţinem:

$$P_{n,\alpha} = \frac{n(n-1)\dots(n-\alpha+1)}{n^\alpha} \frac{a^\alpha}{\alpha!} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-\alpha}.$$

Insă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-\alpha+1)}{\alpha!} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-\alpha} = e^{-a}.$$

Prin urmare, avem din punct de vedere asimptotic

$$P_{n,a} \approx \frac{a^a}{a!} e^{-a}. \qquad (3)$$

Această formulă a fost găsită pentru prima oară de Poisson, al cărui nume îl poartă.

2. Distribuțiile lui Bortkievici

Formula (3) reprezintă asimptotic valorile lui $P_{n,a}$ pentru valorile lui n care satisfac egalitatea (1). Când n crește necontenit, în baza teoremei generale pe care am demonstrat-o, $P_{n,a}$ tinde către legea normală a lui Laplace. Deoarece p este mic, această convergență este însă foarte înceată; $P_{n,a}$ se apropie de legea normală a lui Laplace, dar pentru valori atât de mari ale lui n, încât practic nu ne mai interesează. Deaceea, prezintă utilitate formula (3), care ne dă o valoare aproximată pentru valorile lui n satisfăcând relația (1), pentru care putem efectua statistici.

Bortkievici a fost cel dintâi care s'a ocupat de distribuțiile statistice care urmează legea lui Poisson.

Dăm câteva exemple de distribuții statistice studiate de el.

Numărul nașterilor de patru gemeni din Prusia, pe o perioadă de 69 ani, este dat în tabela alăturată.

a	$P_{n,a}$	Numărul cazurilor observate
0	14,2	14
1	22,5	24
2	17,7	17
3	9,3	9
4	3,7	2
5	1,2	2
6	0,3	1
7	0,1	0
	69	69

De exemplu, din cei 69 ani care intră în perioada statistică de observație, în 17 ani au existat câte două cazuri de nașteri de patru gemeni.

In coloana a doua sunt calculate probabilitățile după formula lui Poisson.

Scanned with OKEN Scanner

Se constată deplina concordanță dintre valorile teoretice și empirice.

In acest caz, s'a aplicat formula de aproximare a lui Poisson, în loc de formula lui Laplace, deoarece probabilitatea de a avea o naștere cu patru gemeni este foarte mică.

Să mai dăm un exemplu calculat tot de Bortkievici.

In perioada 1875—1894, s'a considerat numărul soldaților morți din cauza loviturilor de copite ale cailor.

Statistica se referă la 10 regimente:

Tabela de mai jos arată, de exemplu, că în 65 de cazuri (regiment — an) s'a întâmplat să moară un singur soldat din cauza menționată.

a	$P_{n,a}$	Numărul cazurilor observate
0	108,7	109
1	66,3	65
2	20,2	22
3	4,1	3
4	0,7	1
	200	200

Valorile $P_{n,a}$ sunt calculate după formula lui Poisson.

Se constată acordul satisfăcător dintre frecvență și probabilitate.

Această distribuție are numeroase aplicații practice. Ea este frecvent aplicată la controlul statistic al produselor industriale. Să considerăm, astfel, o mașină care fabrică în serie un număr mare de piese, într'o perioadă dată de timp.

Mașina, funcționând în condiții satisfăcătoare, construește puține piese defecte. Probabilitatea de a obține o piesă defectă este, în general, foarte mică; deaceea, la efectuarea unei asemenea statistici se aplică legea lui Poisson.

Legea lui Poisson se mai aplică în problemele practice ale exploatării rețelei telefonice, în numeroase probleme de fizică, etc.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IX

SCHEMA LUI BERNOULLI CU MAI MULTE STĂRI

1. Considerații generale

Să considerăm că, în cazul urnei lui Bernoulli pe care l-am tratat, în loc de bile de două culori, avem bile de s culori. Extracțiile succesive din urnă le facem în același mod, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă.

Efectuând n extracții din această urnă, am arătat că probabilitatea $P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ de a obține λ_1 bile de culoarea întâi, λ_2 bile de culoarea a doua, $\ldots$, λ_s bile de culoarea a s-a este dată de relația

$$P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \frac{n!}{\lambda_1! \ldots \lambda_s!} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2}, \ldots, p_s^{\lambda_s},$$

unde cu $p_1, p_2, \ldots, p_s$ s'a notat probabilitatea de a ieși respectiv bila de culoarea întâi, a doua, etc.

Pentru această urnă se pun aceleași probleme ca și în cazul clasic al urnei lui Bernoulli, când $s=2$. Deaceea nu vom insista asupra tuturor amănuntelor. Vom dovedi mai târziu că formula de mai sus are o exprimare asimptotică, care generalizează legea lui Laplace pentru mai multe dimensiuni.

Apoi vom arăta că formulele găsite permit să facem aprecieri asupra justeței ipotezei prin care se admite o probabilitate constantă pentru fiecare culoare.

2. Aproximarea probabilităților $P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

Se consideră o variabilă aleatorie X care trece prin stările $a_1, a_2, \ldots, a_s$, cu probabilitățile respective $p_1, p_2, \ldots, p_s$ ($\sum p_i = 1$; $0 < p_i < 1$). Supunem această variabilă la n probe independente și notăm cu λ_i numărul care arată de câte ori variabila a

trecut prin starea a_i ($\sum \lambda_i = n$). Fie $P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ probabilitatea ca variabila X în aceste n probe să treacă respectiv de $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ori prin strările $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Introducem variabila redusă

$$\xi_i = \frac{\lambda_i - np_i}{\sqrt{np_iq_i}}; \qquad (q_i = 1 - n_i).$$

Ne propunem să arătăm că, pentru abaterile reduse îndeplinind condițiile $a_i \leq \xi_i < b_i$, unde a_i și b_i sunt două constante, avem următoarea convergență

$$\sqrt{n^{s-1}}\, P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) : \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum a_i - \xi_i^2}}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_1 p_2 \cdots p_s}} \to 1.$$

Putem da acestei teoreme o demonstrație elementară, bazându-ne pe formula lui Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta_n},$$

unde

$$|\theta_n| \leq \frac{1}{12n}.$$

Avem

$$P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) = \frac{n!}{\lambda_1 ! \ldots \lambda_s !} p_1^{\lambda_1} \cdots p_s^{\lambda_s}.$$

Aplicând formula lui Stirling, rezultă

$$P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) = \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta_n - \sum_1^s \theta\lambda_i}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} \Pi \lambda_i^{\lambda_i + \frac{1}{2}} e^{-\lambda_i}} \pi p_i^{\lambda_i} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}} \sqrt{\frac{n}{\lambda_1 \cdots \lambda_s}}\, e^{\theta} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{np_i}{\lambda_i}\right)^{\lambda_i} =$$

$$= \frac{e^{\theta}}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_1 \cdots p_s}} \prod_{i=q}^{s} \left(1 + \xi_i \sqrt{\frac{q_i}{np_i}}\right)^{-np_i + \xi\sqrt{np_i qi}\, t^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\theta = \theta_n - \theta_{\lambda_i} - \ldots \theta_{\lambda_s}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Insă

$$\log \prod_1^s \left(1+\xi_i\sqrt{\frac{p_i}{nq_i}}\right)^{-\left(np_i+\xi_i\sqrt{np_i}\,q_i+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$=-\sum_1^s\left(np_i+\xi_i\sqrt{np_i}\,q_i+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\xi_i\sqrt{\frac{q_i}{np_i}}\right)=$$

$$=-\sum\left(np_i+\xi_i\sqrt{np_i}q_i+\frac{1}{2}\right)\left[\xi_i\sqrt{\frac{q_i}{np_i}}-\frac{1}{2}\frac{q_i\xi_i^2}{np_i}+\theta\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_1^s q_i\xi_i^2+\theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

deoarece

$$\sum\xi_i\sqrt{np_i}\,q_i=\sum(\lambda_i-np_i)=\sum\lambda_i-n\sum p_i=n-n=0.$$

Pe de altă parte

$$|\theta|<\frac{1}{12n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_s}\right)<\frac{1}{12n}\left(1+\sum\frac{1}{p_i\left(1+a_i\sqrt{\frac{q_i}{np_i}}\right)}\right).$$

Teorema este deci demonstrată.

3. Distribuția variabilei x^2

Convergența considerată arată că în expresia asimptotică a probabilității

$$P_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)\approx\frac{e^{-\frac{1}{2}\Sigma q_i\xi_i^2}}{(2\pi n)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_1\ldots p_s}},$$

$\lambda_1\ldots,\lambda_s$ intervin numai prin intermediul funcției

$$\chi^2=\sum_1^s q_i\xi_i^2.$$

Relația

$$\sum_1^n\lambda_i=n \tag{1}$$

echivalează cu relația

$$\sum_1^s\sqrt{p_iq_i}\,\xi_i=0. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Unei variații $\Delta\lambda_i$ a lui λ_i îi corespunde pentru ξ_i variația

$$\Delta\xi_i = \frac{\Delta\lambda_i}{\sqrt{np_iq_i}}.$$

Cum relația

$$\sum_i \lambda_i = n$$

definește pe λ_s în funcție de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}$, rezultă

$$P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)\Delta\lambda_1 \ldots \Delta\lambda_s \approx \frac{\sqrt{q_1 \ldots q_s}}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_i}} e^{\frac{-\chi^2}{2}} \Delta\xi_1, \ldots \Delta\xi_{s-1}.$$

In locul distribuției discontinue definite de $P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, considerăm distribuția continuă definită de probabilitatea elementară

$$dP = \frac{\sqrt{q_1 \ldots q_{s-1}}}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_s}} e^{\frac{-\chi^2}{2}} d\xi_1 \ldots d\xi_{s-1}$$

împreună cu relațiile (1) și (2) și ne propunem să determinăm distribuția variabilei pozitive χ. In acest scop, vom folosi o demonstrație dată de *T. Lișcu.*

Substituția

$$\xi_i = \chi\eta_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{3}$$

înlocuește variabilele ξ_i prin variabilele $\eta_1, \ldots, \eta_s, \chi$, legate prin relațiile deduse din (1) și (2)

$$\sum_1^s q_i\eta_i^2 = 1, \tag{1'}$$

$$\sum_1^s \sqrt{p_iq_i}\eta_i = 0. \tag{2'}$$

Considerând $\eta_1, \ldots, \eta_{s-2}, \chi$ ca variabile independente, iar η_{s-1} și η_s ca definite de (1') și (2') rezultă

$$q_h\eta_h + q_{s-1}\eta_{s-1}\frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_h} + q_s\eta_s\frac{\partial\eta_s}{\partial\eta_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s-2) \tag{1''}$$

$$\sqrt{p_hq_h} + \sqrt{p_{s-1}q_{s-1}}\frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_h} + \sqrt{p_sq_s}\frac{\partial\eta_s}{\partial\eta_h} = 0. \tag{2''}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notând

$$D_i = \begin{vmatrix} q_i\eta_i & q_s\eta_s \\ \sqrt{p_iq_i} & \sqrt{p_sq_s} \end{vmatrix}$$

se obține din (1″) și (2″)

$$\frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_h} = -\frac{D_h}{D_{s-1}}.$$

In determinantul funcțional

$$\frac{D(\xi_1,\ldots,\xi_{s-1})}{D(\eta_1,\ldots,\eta_{s-1},\chi)} = \begin{vmatrix} \chi & \cdots & 0 & \eta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \chi & \\ \chi\frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_1} & \cdots & \chi\frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_{s-2}} & \eta_{s-2} \\ \chi\frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_1} & \cdots & \chi\frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_{s-2}} & \eta_{s-1} \end{vmatrix} = \chi^{s-2} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & \eta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \eta_{s-2} \\ \frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_1} & \cdots & \frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_{s-2}} & \eta_{s-1} \end{vmatrix}$$

din ultima coloană scăzând celelalte coloane înmulțite respectiv cu $\eta_1,\ldots,\eta_{s-2}$, se obține

$$\frac{D(\xi_1,\ldots,\xi_{s-1})}{D(\eta_1,\ldots,\eta_{s-2},\chi)} = \chi^{s-2}\left[\eta_{s-1} - \sum_1^{s-2}{}_h \eta_h \frac{\partial\eta_{s-1}}{\partial\eta_h}\right] = \chi^{s-2}\frac{\sum_1^{s-1}{}_i \eta_i D_i}{D_{s-1}} =$$

$$= \chi^{s-2}\frac{\begin{vmatrix} \sum q_i\eta_i^2 & q_s\eta_s \\ \sum\sqrt{p_iq_i}\,\eta & \sqrt{p_sq_s} \end{vmatrix}}{D_{s-1}} = \chi^{s-2}\frac{\begin{vmatrix} 1-q_s\eta_s^2 & q_s\eta_s \\ -\sqrt{p_sq_s}\,\eta_s & \sqrt{p_sq_s} \end{vmatrix}}{D_{s-1}} = \chi^{s-2}\frac{\sqrt{p_sq_s}}{D_{s-1}}.$$

Prin substituția (3), fiecărui punct $(\xi_1,\ldots,\xi_{s-1})$ îi corespunde un singur punct $(\eta_1,\ldots,\eta_{s-2},\chi)$ cu $\chi>0$, obținut determinând ξ_s din (2), χ din (1) și η_i din (3), și reciproc, fiecărui punct $(\eta_1,\ldots,\eta_{s-2},\chi)$ cu

$$\sum_1^{s-2}{}_h q_h\eta_h^2 < 1, \qquad \chi>0$$

îi corespund două puncte $(\xi_1,\ldots,\xi_s)$, obținute determinând două sisteme de valori (η_{s-1},η_s) din (1′), (2′) și din (3).

Deci, prin substituția (3), spațiul $\xi_1,\ldots,\xi_{s-1}$ acoperă de două ori spațiul $\eta_1,\ldots,\eta_{s-1}$.

In fiecare dintre cele două puncte $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1})$ care corespund aceluiași punct $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{s-1}, \chi)$,

$$\left| \frac{D(\xi_1, \ldots, \xi_{s-2}, \xi_{s-1})}{D(\eta_1, \ldots, \eta_{s-2}, \chi)} \right| = \chi^{s-2} \frac{\sqrt{p_s q_s}}{|D_{s-1}|}$$

are aceeași valoare, deoarece

$$D_{s-1}^2 = q_{s-1} q_s [(p_{s-1} + p_s)(q_{s-1}\eta_{s-1}^2 + q_s \eta_s^2) - (\sqrt{p_{s-1} q_{s-2}}\, \eta_{s-1} + \sqrt{p_s q_s}\, \eta_s)^2] =$$

$$= q_{s-1} q_s \left[\left(p_{s-1} + p_s \right) \left(1 - \sum_1^{s-2} q_h \eta_h^2 \right) - \left(\sum_1^{s-2} \sqrt{p_h q_h}\, \eta_h \right)^2 \right]$$

și, în consecință, $|D_{s-1}|$ sunt unic determinate în funcție de $\eta_1, \ldots, \eta_{s-2}$.

Rezultă:

$$dP = 2 \frac{\sqrt{q_1 \ldots q_{s-1}}}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_s}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \frac{\sqrt{p_s q_s}}{|D_{s-1}|} d\eta_1 \ldots d\eta_{s-1} d\chi.$$

Deoarece

$$\chi^{s-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} > 0$$

pentru

$$\chi > 0$$

atunci

$$F(x) = \frac{\int_0^n \chi^{s-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi}{\int_0^\infty \chi^{s-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi}$$

este o funcție de repartiție.

Prin substituția

$$t = \frac{\chi^2}{2}$$

se obține

$$\int_0^\infty \chi^{s-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi = 2^{\frac{s-3}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{s-3}{2}} e^{-t} dt = 2^{\frac{s-3}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)$$

unde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Astfel

$$dP = \frac{\chi^{s-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi}{2^{\frac{s-3}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{s-1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{q_1 \ldots q_s}}{|D_{s-1}|} d\eta_1 \ldots d\eta_{s-2}$$

este produsul a două probabilități elementare independente, dintre care prima este legea lui χ.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că am demonstrat următoarea teoremă:

Notând

$$\sum \frac{(\lambda_i - np_i)^2}{np_i} = \chi^2,$$

probabilitatea elementară ca să avem pentru expresia de mai sus o probabilitate cuprinsă între χ și $\chi + d\chi$ este egală cu

$$\frac{\chi^{s-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi}{2^{\frac{s-3}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}.$$

Rezultă că probabilitatea ca χ să fie mai mic decât χ_0 este egală cu

$$\Phi(\chi_0) = \frac{1}{2^{\frac{s-3}{2}} p\left(\frac{s-1}{2}\right)} \int_0^{\chi_0} \chi^{s-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi.$$

Au fost calculate tabele conținând valorile funcției $\Phi(\chi_0)$.

Această lege de probabilitate permite să tragem concluzii asupra probabilității admiterii unor probabilități constante dela probă la probă.

Vom da un exemplu de modul cum se aplică formula de mai sus considerând un caz pe care l-am mai examinat.

Am arătat în capitolul VII, pag. 98 în ce constă experiența lui Weldon.

Pentru a forma pe χ^2, facem tabela:

x	Numere observate n_x	Numere teoretice np_x	Abateri $n_x - np_x$	$\frac{(n_x - np_x)^2}{np_x}$
0	185	203	— 18	1,6
1	1 149	1 216	— 67	3,7
2	3 265	3 345	— 80	1,9
3	5 475	5 576	—101	1,9
4	6 114	6 273	—159	4,0
5	5 194	5 018	176	6,1
6	3 067	2 927	140	6,7
7	1 331	1 255	76	4,6
8	403	392	11	0,3
9	105	87	18	3,7
10	14	13	1	0,1
11	4	1	3	9
12	0	0	—	—
Total	26 306	26 306	0	43,6

Se găseşte pentru valoarea χ^2 valoarea 43,6.

In cazul în care avem $s=11$ legea de probabilitate stabilită pentru χ^2 ne arată că trebue să avem $\chi^2 \geq 18{,}3$ cu o probabilitate egală cu 0,05. Cum $\chi^2=43{,}6$ este cu mult mai mare decât 18,3 rezultă că nu putem admite ipoteza zarurilor regulate.

PROBLEME

1. Să se calculeze momentele de distribuţie ale lui χ.

2. Să se demonstreze că, dacă variabilele $x_1, x_2, \ldots x_r$ sunt independente şi fiecare urmează legea normală redusă, atunci x, definit de

$$x^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2,$$

urmează legea lui χ cu

$$r=s-1.$$

3. Cercetările asupra numărului π au realizat, în ce priveşte exprimarea sa ca număr zecimal, calculul primelor 707 cifre ale sale.

Numărul zecimal obţinut prezintă următoarele frecvenţe ale cifrelor 0, 1,...,9:

cifra	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frecvenţa	74	78	74	72	71	64	70	53	72	79

Este plauzibilă ipoteza că fiecare cifră are probabilitatea $^1/_{10}$ de apariţie?

4. Un colectiv, având elemente de patru categorii, a dat în urma a 3 839 observaţii independente următoarele rezultate:

categoria	1	2	3	4
frecvenţa	1 997	906	904	32

Să presupunem că proporţiile în care intervin cele patru categorii sunt $^9/_{16}$, $^3/_{16}$, $^3/_{16}$, $^1/_{16}$.

Să se arate că această presupunere nu este de acord cu rezultatele observaţiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL X

LEGEA NUMERELOR MARI

1. Considerații generale

Multe fenomene statistice se bucură de așa numita „stabilitate statistică" care, sub o formă vagă, exprimă faptul constatat de experiență că aproape toate colectivele prezintă o anumită regularitate, cu atât mai pronunțată, cu cât numărul elementelor componente ale colectivului este mai mare.

Astfel, raportul dintre numărul morților unei populații și al tuturor indivizilor care o compun se păstrează în fiecare an aproximativ același, cu condiția ca numerele la care ne referim să fie destul de mari. La fel, raportul dintre numărul copiilor de sex masculin nou născuți și al acelora de sex feminin. Dacă aruncăm o monetă de numeroase ori în sus, ne așteptăm ca raportul dintre numărul de cazuri în care ni s'a prezentat o anumită față și numărul total al aruncărilor să fie aproximativ egal cu $^1/_2$.

Aceste regularități au atras atenția oamenilor de știință și și-au găsit aplicații practice înainte de a fi fost studiate matematic. Dar aplicații științifice nu s'au dat acestor regularități decât târziu.

Această stabilitate statistică am pus-o la baza definiției probabilității, arătând că fenomenele la care se aplică calculul probabilităților trebue să fie stabile, în sensul empiric pe care l-am arătat.

Dacă f_n reprezintă frecvența relativă a unui fenomen de probabilitate constantă q, am văzut că, în general, nu avem:

$$\lim_{n \to \infty} f_n = p. \tag{1}$$

Am arătat că nici concepția lui Mises, după care relația (1) este luată ca definiție a probabilității, nu este valabilă.

Totuși, pentru unele fenomene, între frecvență și probabilitate există anumite legături exprimate matematic, care au dus la ideea greșită că poate fi demonstrată stabilitatea statistică a frecvențelor care intră în această categorie.

Evident, studiul aprofundat al convergenței șirului de frecvențe nu se face numai pentru înlăturarea acestei idei greșite. El își găsește numeroase aplicații, constituind astăzi unul dintre cele mai importante capitole ale teoriei probabilităților.

2. Moduri de convergență

O aprofundare a relației dintre frecvență și probabilitate trebue să fie precedată de o examinare a diferitelor moduri de convergență care se pot încadra în teoria probabilităților.

Să considerăm astfel șirul de frecvențe:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{2}$$

Dacă există o constantă p, astfel încât să avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n = p,$$

spunem că șirul tinde către p în *sensul analizei clasice.*

In acest caz, suntem în prezența celei mai strânse legături care poate exista între frecvența f_n și probabilitatea p.

Există însă, uneori, între aceste frecvențe și probabilitatea p o altă relație de natură statistică, cu mult mai interesantă, deoarece, prin noutatea ei, rupe orice contact cu celelalte ramuri ale matematicilor.

Această relație, specifică teoriei probabilităților, afirmă că probabilitatea inegalității

$$|f_n - p| < \varepsilon, \tag{3}$$

unde ε este un număr dat, pozitiv și arbitrar de mic, tinde către 1, când n crește necontenit.

Avem, cu alte cuvinte, proprietatea de limită

$$\lim_{n\to\infty} [|f_n - p| < \varepsilon] = 1.$$

Dacă relația (3) este îndeplinită, se spune că șirul (2) tinde către p *în probabilitate.* Cu o expresie mai veche, același proces de limită este numit *tindere la limită în sensul calculului probabilităților.*

In sfârșit, pentru precizarea proprietăților pe care le vom pune în evidență, mai este necesară introducerea noțiunii de *convergență puternică,* considerată pentru prima oară de Cantelli.

Scanned with OKEN Scanner

Spunem că şirul f_n admite o convergenţă puternică către p, dacă probabilitatea inegalităţilor

$$|f_n - p| < \varepsilon, \ldots, |f_{p+k} - p| < \varepsilon,$$

— unde ε este un număr pozitiv, arbitrar de mic, iar k un număr întreg, pozitiv — tinde către 1, când n creşte nemărginit.

Această proprietate de limită se mai poate scrie şi sub o altă formă.

Să notăm cu E_{n+k} evenimentul

$$|f_{n+k} - p| < \varepsilon.$$

Convergenţa puternică este definită de relaţia

$$\lim P[E_n \cup E_{n+1} \cup E_{n+2} \cup \ldots \cup E_{n+k}] \longrightarrow 1,$$

oricare ar fi numărul k.

Convergenţa puternică există şi în cazul în care considerăm evenimente mai generale

$$|f_n - p| \varepsilon < {}_n, \ldots, |f_{n+k} - p| < \varepsilon_{n+k},$$

şirul ε_n tinzând către zero, când n creşte necontenit.

3. Teorema lui Bernoulli

J. Bernoulli a demonstrat o teoremă interesantă, legată de urna care îi poartă numele:

Dacă se consideră un eveniment A, a cărui probabilitate de realizare este p, frecvenţa relativă f_n — numărul care indică de câte ori s'a realizat A în n probe — tinde către p „în probabilitate".

Pentru demonstraţie, să notăm cu a numărul care arată de câte ori s'a realizat A în n probe consecutive.

Inegalitatea

$$|f_n - p| < \varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv, arbitrar de mic, este îndeplinită în acelaşi timp cu inegalitatea

deoarece

$$(a - np) < n\varepsilon,$$

$$f_n = \frac{a}{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu P_n probabilitatea inegalității precedente, după teorema lui Cebâșev, avem

$$P_n \geq 1 - \frac{\mu^2}{n^2\varepsilon^2},$$

unde μ reprezintă valoarea medie pătratică a variabilei considerate. Insă, în cazul de față, am arătat că $\mu = \sqrt{npq}$.

Prin urmare

$$P_n \geq 1 - \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Rezultă că, dacă n crește necontenit, P_n tinde către 1.

Proprietatea este prin urmare demonstrată.

Se poate da teoremei lui Bernoulli și o demonstrație directă, la fel de simplă.

In capitolul VII, am arătat că

$$\lim P[-\xi\sqrt{2npq} < \alpha - np < \xi\sqrt{2npq}] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2} dx.$$

Ne propunem să calculăm probabilitatea inegalității

$$\left| \frac{\alpha}{n} - p \right| < \varepsilon.$$

Această inegalitate se mai poate scrie

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{2pq}}\sqrt{2npq} < \alpha - np < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{2pq}}\sqrt{2npq}.$$

Ea corespunde cazului când $\xi = \sqrt{\frac{n}{2pq}}$ ia valori din ce în ce mai mari.

Insă

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 1,$$

ceeace justifică afirmația făcută mai sus cu privire la probabilitatea evenimentului considerat.

4. Teorema lui Poisson

Considerăm șirul de evenimente

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

a căror probabilitate de realizare are valorile succesive

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Notând cu f frecvența relativă a numărului care indică de câte ori s'au realizat evenimentele

$$E_1,\ E_2,\ldots,\ E_n,\ldots$$

și cu p expresia

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{p_1+\cdots+p_n}{n}$$

presupunând că această limită există, Poisson a demonstrat că f_n tinde către p *în probabilitate*.

Demonstrarea teoremei lui Poisson se face pe aceeași cale ca și pentru teorema lui Bernoulli, pe care dealtfel o generalizează.

Să notăm cu

$$X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n,\ldots$$

variabilele statistice care iau valoarea 1 ori de câte ori se realizează evenimentele

$$E_1,\ E_2,\ldots,\ E_n,\ldots$$

și valoarea zero, când aceste evenimente nu se realizează.

Prin definiție, frecvența f_n reprezintă valoarea luată experimental de variabila

$$Y_n=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}.$$

Pe de altă parte

$$M(Y_n)=M\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}M(X_i)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i}{n}.$$

Notând deci cu α valoarea luată de

$$(X_1+X_2+\cdots+X_n),$$

expresia

$$\frac{\alpha}{n}-\frac{p_1+\cdots+p_n}{n}=f_n-\frac{p_1+\cdots+p_n}{n}$$

reprezintă abaterea variabilei Y_n.

Un calcul simplu ne arată că

$$M\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right]^2=\frac{p_1q_1+\cdots+p_nq_n}{n^2}.$$

Prin urmare, valoarea medie pătratică, pe care o notăm cu μ, este dată de relaţia:

$$\mu = \frac{\sqrt{p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n}}{n}.$$

In baza teoremei lui Cebâşev, rezultă inegalitatea

$$P_n \geq 1 - \frac{\sqrt{p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n}}{n^2 \varepsilon^2},$$

prin P_n notând probabilitatea ca să avem inegalitatea

$$\left| f_n - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n} \right| < \varepsilon.$$

Insă

$$p_i q_i \leq \frac{1}{4},$$

deoarece

$$p_i \geq 0; \quad q_i \geq 0; \quad p_i + q_i = 1.$$

Prin urmare

$$p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n \leq \frac{n}{4}.$$

Inegalitatea satisfăcută de P_n devine în baza relaţiei de mai sus

$$P_n \leq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

deci când n tinde către infinit, P_n tinde către 1.

De aici rezultă ceeace am vrut să punem în evidenţă, anume că şirul f_n tinde către p *cu mare probabilitate.*

Observaţii. O judecată superficială ar putea duce la concluzia că teorema lui Bernoulli demonstrează legea empirică a întâmplării. Această concluzie este cu totul greşită.

In adevăr, teorema lui Bernoulli afirmă că probabilitatea inegalităţii

$$| f_n - p | < \varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv, arbitrar de mic, tinde către 1, când n creşte necontenit. Aceasta înseamnă că, notând cu $P[|f_n - p| < \varepsilon]$ probabilitatea inegalităţii de mai sus, putem determina un număr N, astfel ca pentru $n > N$ să rezulte

$$P[|f_n - p| < \varepsilon] > 1 - \delta,$$

prin δ înţelegând un număr pozitiv dat, arbitrar de mic.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, pentru n mai mare decât N, probabilitatea ca frecvența f_n să fie foarte aproape de p — diferența lor fiind în valoare absolută mai mică decât ε — este mai mare decât $1-\delta$ (și în general diferită de 1). Teorema lui Bernoulli nu demonstrează că inegalitatea

$$|f_n - p| < \varepsilon$$

este îndeplinită, ci numai că ea are șanse să fie realizată experimental, în baza faptului că admite o probabilitate foarte aproape de 1.

Dar de unde știm noi că un eveniment care admite o probabilitate foarte apropiată de 1 are șanse mari să se realizeze experimental? Am văzut că acest fapt nu rezultă din axiomele teoriei probabilităților.

El nu poate fi demonstrat teoretic, constituind pentru o categorie de fenomene o lege obiectivă, care se verifică experimental, întocmai după cum, de exemplu, se constată că un metal, în anumite condiții, se topește la temperatura de $N°$. Nu se poate demonstra matematic că metalul trebue să se topească la temperatura de $N°$, dar putem să ne bizuim în calculele noastre pe acest fapt ori de câte ori va trebui să-l folosim în cercetările noastre.

Teorema lui Bernoulli nu demonstrează deci stabilitatea fenomenelor.

5. Teorema lui Cantelli

Proprietățile de convergență, pe care le-am expus în legătură cu urna lui Bernoulli, formează împreună legea numerelor mari.

Este însă interesant de observat că variabilele care schematic se pot reprezenta printr'o urnă a lui Bernoulli admit și o convergență puternică, în sensul definiției pe care am dat-o. Această proprietate, găsită de Cantelli, arată motivul de natură practică, pentru care putem să aplicăm în câmpul științelor aplicate teoria probabilistică referitoare la urna lui Bernoulli.

In adevăr, pentru scopuri practice, o probabilitate foarte apropiată de 1 coincide cu certitudinea. Astfel, dacă într'o urnă avem un milion de bile albe și una neagră, probabilitatea să scoatem o bilă albă este

$$\frac{10^6}{10^6+1} = 1 - \frac{1}{10^6+1}.$$

Probabilitatea de mai sus este foarte aproape de 1, însă experimental o putem considera chiar egală cu 1, în sensul că exprimă probabilitatea unui eveniment de realizare certă. Această afirmație

Scanned with OKEN Scanner

este o consecință a faptului că, pentru motive de ordin practic, considerăm ca sigură scoaterea din urnă a unei bile albe, atunci când în urnă există un milion de bile albe și una singură neagră.

Prin urmare, dacă în baza teoremei lui Bernoulli, inegalitatea

$$|f_n - p| < \varepsilon$$

se prezintă cu o probabilitate atât de apropiată de 1 cât vrem noi, cu condiția ca $n \geq N$, rezultă că, din punct de vedere practic, putem să o considerăm ca o certitudine.

In diferitele aplicații ale acestor șiruri de variabile este însă necesar să se verifice nu numai egalitatea de mai sus, ci toate inegalitățile care o urmează:

$$|f_n - p| < \varepsilon, \ldots, \; |f_{n+k} - p| < \varepsilon, \ldots \; (H)$$

Prin urmare, trebue ca probabilitatea evenimentului (H) să se realizeze sau, după denumirea pe care am dat-o, să existe o convergență puternică către p a șirului de frecvențe f_n.

Vom expune pe scurt demonstrația acestei proprietăți dată de Cantelli.

Dacă notăm cu $1-q_i$ probabilitatea inegalității $|f_i - p| < \varepsilon$, știm că în baza teoremei lui Boole

$$p_n \geq 1 - (q_n + q_{n+1} + \cdots),$$

dacă notăm cu p_n probabilitatea realizării evenimentului (H).

Este suficient ca seria

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n + \cdots$$

să fie convergentă, pentru ca p_n să tindă către 1, când n crește nemărginit.

In baza unei formule a lui Medolaghi, care generalizează inegalitatea lui Cebâșev, se știe că

$$q_i \leq \frac{M_4^{(i)}}{\varepsilon^4},$$

unde $M_4^{(i)}$ este momentul de ordinul al patrulea al abaterii relative $f_i - p$.

Această formulă se demonstrează în același mod ca și inegalitatea lui Cebâșev, considerând momentul de ordinul al patrulea, în loc de momentul de ordinul al doilea.

Scanned with OKEN Scanner

Insă

$$M_4^{(i)} = M(f_i - p)^4 = \frac{1}{i^2}\left(3p^2q^2 - \frac{6p^2q^2}{i} + \frac{pq}{i}\right)$$

şi

$$3p^2q^2 - \frac{6p^2q^2}{i} + \frac{nq}{i} \leq 3p^2q^2 + \frac{nq}{i} \leq \frac{3}{16} + \frac{1}{4i} < \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16} < 1,$$

deoarece

$$pq \leq \frac{1}{4}.$$

Prin urmare

$$M_4^{(i)} = \frac{1}{i^2}\left[3p^2q^2 - \frac{6p^2q^2}{i} + \frac{pq}{i}\right] \leq \frac{1}{i^2}.$$

In baza inegalităţii lui Medolaghi, rezultă că

$$q_i \leq \frac{1}{\varepsilon^2 i^2}.$$

Această relaţie ne arată, însă, că seria q_n este convergentă şi, prin urmare, teorema este demonstrată.

A. I. Hincin a dat acestei proprietăţi de convergenţă o interesantă generalizare.

El a considerat un şir de numere pozitive

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

tinzând către zero, când n tinde către infinit şi el şi-a propus să le determine astfel încât probabilitatea inegalităţilor

$$|f_n - p| < c\,\varepsilon_n, \ldots, |f_{n+k} - p| < c\,\varepsilon_{n+k}$$

să tindă către 1, pentru $c<1$, când n creşte nemărginit şi să tindă către zero, în aceleaşi condiţii, dacă $c>1$.

Rezultatul important stabilit de Hincin este că ε_n are valoarea

$$\varepsilon_n = \sqrt{n \log \log n}.$$

Exemple. Observaţii. Legea numerelor mari se prezintă sub diferite aspecte. Unul dintre ele este cu deosebire interesant, pentrucă dă fenomenelor statistice o anumită stabilitate matematică, care pare în contradicţie cu caracterul specific al evenimentelor variabile după întâmplare [1]).

---

[1]) *O. Onicescu* şi *G. Mihoc*, Sopra le leggi—limite delle probabilità (Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, VII, Nr. 1, 1936).

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm o urnă care conține m bile albe și m bile negre; din această urnă se execută o serie de extracții înlocuind de fiecare dată bila extrasă printr'o bilă de cealaltă culoare. In aceste condiții, probabilitatea ca în extracția de rangul n să scoatem o bilă albă este, din motive de simetrie, egală cu probabilitatea de a scoate o bilă neagră. Prin urmare, această probabilitate este egală cu $\frac{1}{2}$. Dată fiind valoarea acestei probabilități, ne propunem să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{1}{2}$$

prin f_n înțelegând frecvența relativă a numărului de bile albe ieșite în n extracții.

Să notăm cu α numărul de bile albe ieșite în n extracții. Frecvența relativă are valoarea

$$f_n = \frac{\alpha}{n}.$$

In condițiile în care se fac extracțiile, numărul bilelor albe rămase în urnă, după efectuarea celor n extracții, este

$$m-\alpha+(n-\alpha)=m+n-2\alpha.$$

Cum însă numărul total al bilelor din urnă rămâne totdeauna același și egal cu $2m$, este evident că

$$0 \leqq m+n-2\alpha \leqq 2m.$$

Sau

$$-m \leqq n-2\alpha \leqq m.$$

$$-\frac{m}{2n} \leqq \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n} \leqq \frac{m}{2n},$$

$$-\frac{m}{2n} \leqq \frac{1}{2} - f_n \leqq \frac{m}{2n}.$$

Ultimele inegalități ne arată că, dacă n tinde către infinit,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{1}{2}.$$

Frecvența relativă f_n, deși oscilează la întâmplare, tinde totuși către probabilitatea $\frac{1}{2}$ în sensul analizei.

Putem considera și o schemă mai generală care ne duce la același rezultat.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm m urne

$$U_1(\lambda_1, \mu_1), \ldots, U_m, (\lambda_m, \mu_m), \tag{4}$$

numerele λ_k și μ_k indicând respectiv pentru urna U_k, numărul de bile albe și bile negre care se găsesc în această urnă. Despre numerele întregi și pozitive λ_i, μ_i presupunem că sunt diferite de zero, cu excepțiile $\lambda_1 = 0$, $\mu_m = 0$.

Efectuăm din aceste urne o serie de extracții, după următoarea regulă: dacă extracția de ordinul r a fost efectuată din urna U_k și dacă rezultatul extracției a fost o bilă albă, extracția de ordinul $r+1$ va fi efectuată din urna U_{k-1}. Dimpotrivă, dacă rezultatul extracției este o bilă neagră, extracția de ordinul $k+1$ va fi executată din urna U_{k+1}. După fiecare extracție, bila scoasă se pune înapoi în urnă.

Fie $p_1, \ldots, p_m$ probabilitățile respective de a extrage o bilă albă din urna U și $q_1, \ldots, q_m$ probabilitățile de a extrage o bilă neagră.

Evident, obținem

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \neq 0, \ldots, p_{m-1} = \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_{m-1} + \mu_{m-1}} \neq 0, \quad p_m = 1$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \neq 0, \ldots, q_{m-1} = \frac{\mu_{m-1}}{\lambda_{m-1} + \mu_{m-1}} \neq 0, \quad q_m = 0.$$

Notăm cu x_n numărul bilelor albe ieșite la a n-a extracție (avem evident $x_n = 0$ sau $x_n = 1$) și fie $P_k(n)$ probabilitatea de a avea $x_n = 1$, dacă am început extracțiile cu o bilă albă din urna U_k. Aceste diferite probabilități sunt legate prin următoarele relații de recurență

$$\begin{aligned}
&P_1(n) = P_2(n-1) \\
&P_2(n) = p_2 P_1(n-1) + q_2 P_3(n-1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&P_{m-1}(n) = p_{m-1} P_{m-2}(n-1) + q_{m-1} P_m(n-1) \\
&P_m(n) = P_{m-1}(n-1)
\end{aligned} \tag{5}$$

Notăm cu $P_k(n, m)$ probabilitatea de a avea

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,$$

prima extracție fiind făcută din urna U_k. Aceste probabilități verifică evident relațiile de recurență

$$P_k(n, m) = p_k P_{k-1}(n-1, m-1) + q_k P_{k-1}(n-1, m). \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în aceleași împrejurări notăm cu $M_k(n)$ valoarea medie $x_1+x_2+\cdots+x_k$, obținem:

$$M_k(n)=\sum_{m=0}^{n} mP_k(n,m),$$

ceeace ne dă, ținând seamă de (6), noul sistem

$$M_k(n)=p_k M_{k-1}(n-1)+q_k M_{k-1}(n-1)+p_k \qquad (7)$$

care ne conduce la o soluție de forma

$$M_k(n)\approx\theta n+\beta_k$$

β_k fiind determinat prin condițiile

$$p_k\beta_{k-1}-\beta_k+q_k\beta_{k+1}=\theta-p_k.$$

Acestea din urmă pot fi scrise și

$$p_k\beta_{k-1}-(p_k+q_k)\beta_k+q_k\beta_{k+1}=\theta-p_k,$$

sau

$$p_k(\beta_{k-1}-\beta_k)-q_k(\beta_k-\beta_{k+1})=\theta-p_k$$

Dacă notăm $y_{k-1}=\beta_{k-1}-\beta_k$, avem un nou sistem de relații

$$\gamma_1=-\theta$$
$$p_2\gamma_1-q_2\gamma_3=\theta-p_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{m-1}\gamma_{m-2}-q_{m-1}\gamma_m=\theta-p_{m-1}$$
$$\gamma_{m-1}=\theta-1.$$

Dacă notăm $q_i=t_i p_i$, găsim

$$\gamma_1=-\theta$$
$$\gamma_1=t_2\gamma_2-1+\frac{\theta}{p_2}$$
$$\gamma_2=t_3\gamma_3-1+\frac{\theta}{p_3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_m=\theta-1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar cum $\frac{1}{p_i} = 1 + t_i$, acest sistem dă

$$\gamma_1 = -\theta$$
$$\gamma_1 = t_2\gamma_2 + t_2\theta + \theta - 1$$
$$\gamma_2 = t_3\gamma_3 + t_3\theta + \theta = 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_{m-1} = \theta - 1.$$

Dacă omitem prima și ultima dintre aceste egalități, celelalte ne dau

$$\gamma_1 = t_2t_3\ldots t_{m-1}\ \theta - t_2t_3\ldots t_{m-1} - [t_2 + t_2t_3 + \cdots + t_2\ldots t_{m-1}]\theta +$$
$$+ [1 + t_2 + \cdots + t_2t_3\ldots t_{m-2}]\theta - [1 + t_2 + \cdots + t_2t_3\ldots t_{m-2}],$$

de unde

$$\theta = \frac{1}{2}.$$

Dar

$$M_k(n) = M_k(x_1) + \cdots + M_k(x_n)$$

și

$$M_k(x_p) = P_k(p).$$

Deci

$$M_k(n) = P_k(1) + \cdots + P_k(n).$$

De aici rezultă că

$$P_k(1) + \cdots + P_k(n) \approx \frac{1}{2}n,$$

deci asimptotic

$$\frac{P_k(1) + \cdots + P_k(n)}{n} \approx \frac{1}{2}$$

și prin urmare $P = \frac{1}{2}$.

Putem acum să enunțăm următoarea teoremă:

Oricare ar fi urnele $U_2, U_3, \ldots, U_{m-1}$ și urna inițială din care am început extracțiile, probabilitatea de a obține în extracția de ordinul n o bilă albă tinde în medie, pentru $n \to \infty$, către $\frac{1}{2}$.

Fie α numărul bilelor albe și β numărul bilelor negre obținute în n extracții

$$\alpha + \beta = n.$$

Prima extracție fiind efectuată din urna U_k, presupunem că, după n extracții, am ajuns la urna U_j.

Dacă $j > k$ am obținut $j-k$ bile negre în plus față de numărul bilelor albe:

$$\beta - \alpha = j - k.$$

Dealtfel, această formulă este generală, oricare ar fi k și j.

Rezultă, deci

$$\alpha = \frac{n}{2} - \frac{j-k}{2}; \quad \beta = \frac{n}{2} + \frac{j-k}{2}.$$

Din prima relație rezultă

$$\left| \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{|j-k|}{2n}.$$

Deoarece

$$|j-k| < m,$$

obținem

$$\left| \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{m}{2n}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{2},$$

în sensul analizei clasice[1]).

Ca deobicei, considerând $\frac{\alpha}{n}$ ca frecvență,

$$\frac{\alpha}{n} = f_n$$

egalitatea limită precedentă dă relația asimptotică

$$\lim_{n\to\infty} \left[f_n - \frac{P_k(1) + \cdots + P_k(n)}{n} \right] = 0$$

în sensul analizei clasice, între variabilele statistice f_n și

$$\frac{\sum_1^n P_k(i)}{n}.$$

Exemplul mai sus considerat arată legătura cea mai strânsă dintre frecvență și probabilitate. El înlătură chiar postulatul legii numerelor mari, întrucât f_n tinde către p, în mod ordinar.

---

[1]) *O. Onicescu* și *G. Mihoc*, Asupra unui șir de urne așezate circular, Analele științifice ale Universității din Iași, Tomul XXIV, 1938.

Prin urmare, suntem siguri că

$$|f_n - p| < \epsilon$$

oricât de mic ar fi ϵ, dacă $n > N$.

Această siguranță are deci loc nu numai în sens practic, ci și teoretic.

Nu trebue, însă, să credem că legea numerelor mari, exprimată printr'o convergență ordinară sau *în probabilitate*, constitue o proprietate caracteristică a șirurilor de variabile statistice. Dimpotrivă, se pot da exemple în care legea numerelor mari încetează de a mai exista, sub orice formă.

Următoarea schemă simplă, datorită lui *Markov*, lămurește această chestiune. Se pornește dela o urnă, conținând două bile, una albă și una neagră și se consideră ipoteza că, după fiecare extracție, bila ieșită este înlocuită cu două bile de aceeași culoare.

După n extracții, putem scoate

$$0, 1, 2, \ldots, n$$

bile albe, cu probabilitățile respective:

$$P_n(0), \quad P_n(1), \quad P_n(2), \ldots, P_n(n).$$

Din ipoteza considerată, rezultă relația de recurență

$$P_n(\alpha) = \frac{\alpha}{n+1} P_{n-1}(\alpha - 1) + \frac{n-\alpha}{n+1} P_{n-1}(\alpha).$$

Presupunând că

$$P_{n-k}(\alpha - 1) = P_{n-1}(\alpha) = \frac{1}{n},$$

din egalitatea precedentă obținem

$$P_n(\alpha) = \frac{1}{n+2}.$$

Prin urmare, dacă presupunem că

$$P_{n-1}(\alpha) = \frac{1}{n},$$

oricare ar fi α, rezultă că

$$P_n(\alpha) = \frac{1}{n+1}; \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Știind că

$$P_n(0) = P_1(1) = \frac{1}{2},$$

rezultă că relația

$$P_n(\alpha)=\frac{1}{n+1},$$

este adevărată, oricare ar fi n și α, cuprins între 0 și n incluziv.

Probabilitățile ca din n extracții să se obțină succesiv frecvențele

$$\frac{0}{n},\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n}{n}$$

sunt respectiv

$$\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n+1},\ \ldots,\ \frac{1}{n+1}.$$

Niciuna dintre frecvențele de mai sus nu se prezintă cu o probabilitate mai mare; toate sunt egal probabile și, prin urmare nu poate fi vorba de vreo convergență, de orice natură.

6. Convergența variabilelor aleatorii în general

In toate proprietățile referitoare la legea numerelor mari am ajuns la concluzia existenței unui șir de variabile care tind la limită către o constantă, tinderea la limită având loc, fie în sens ordinar, fie *în probabilitate*. Aceste proprietăți constitue, însă, un caz particular de convergență, deoarece în cazul general un șir convergent de variabile tinde tot către o variabilă.

Astfel, considerând șirul

$$X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n,\ldots$$

spunem, prin definiție, că acest șir tinde *în probabilitate* către variabila X, dacă probabilitatea inegalității

$$|X_n-X|<\varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv, arbitrar de mic, tinde către 1, când n crește necontenit.

Spunem că două șiruri de variabile aleatorii

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots$$
$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n,\ \ldots$$

sunt *echivalente în sensul analizei*, dacă

$$\lim_{n\to\infty}(X_n-Y_n)=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

In mod analog se definește echivalența puternică și echivalența *în probabilitate*.

In legătură cu aceste moduri de convergență, se pot pune noi și nenumărate probleme. Vom da un exemplu, strâns legat de acela pe care l-am dat pentru a dovedi existența convergenței ordinare.

Să presupunem astfel că o urnă conține a bile albe, b bile negre și c bile roșii; dacă scoatem din urnă o bilă albă, în locul ei punem una neagră; invers, dacă scoatem o bilă neagră, în locul ei introducem una albă, iar dacă iese o bilă roșie, o punem înapoi în urnă.

Scriem

$$a+b+c=m,$$

$$p=\frac{a}{m};\quad q=\frac{b}{m};\quad r=\frac{c}{m}.$$

Valoarea lui r rămâne constantă, oricare ar fi rangul extracțiilor, pentrucă numărul bilelor roșii rămâne mereu același în urnă.

Dacă notăm cu α, β, γ, (unde $\alpha+\beta+\gamma=n$) numerele respective de bile albe, negre și roșii ieșite în n extracții, frecvențele relative corespunzătoare sunt

$$f_n=\frac{\alpha}{n};\quad g_n=\frac{\beta}{n};\quad h_n=\frac{\gamma}{n}.$$

Bilele roșii, având totdeauna probabilitatea r de a ieși, se supun regulilor lui Bernoulli, deci putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} h_n=r,$$

limita de mai sus având loc *în probabilitate*.

Pe de altă parte, după primele n extracții, numărul bilelor albe din urnă este $a-\alpha+\beta$.

Acest număr trebue să fie cuprins între 0 și $a+b$, numărul total al bilelor de culoare albă și neagră din urnă.

Deci:

$$0\leq a-\alpha+\beta\leq a+b,$$

$$-a\leq -\alpha+\beta\leq b,$$

$$-\frac{a}{n}\leq -\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}\leq\frac{b}{n},$$

$$-\frac{a}{n}\leq -f_n+g_n\leq\frac{b}{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece a şi b sunt numere finite, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}(f_n-g_n)=0,$$

limita de mai sus având loc în sensul analizei, fără ca f_n-g_n să înceteze de a rămâne o variabilă statistică.

Un calcul direct ne arată că, în adevăr, legile reduse ale lui f_n şi g_n tind către legea lui Laplace. Prin urmare, vom avea „*cu probabilitate mare*"

$$\lim_{n\to\infty} f_n=\frac{1-r}{2}\,,\quad \lim_{n\to\infty} g_n=\frac{1-r}{2}\,.$$

PROBLEME

1. Se consideră un sistem de urne

$$U_1(\lambda_1,\mu_1),\ldots,U_m(\lambda_m,\mu_m),$$

urna U_k conţinând λ_k bile albe şi μ_k bile negre. Numerele λ_k şi μ_k sunt diferite de zero.

Din urnele de mai sus se efectuează o serie de extracţii după regula următoare: dacă extracţia de ordinul p a fost efectuată din urna U_k şi rezultatul a dat o bilă albă, extracţia de ordinul $p+1$ va fi efectuată din urna U_{k-1}; dacă a ieşit o bilă neagră, extracţia următoare va fi efectuată din urna U_{k+1}.

Să se arate că frecvenţa f_n de bile albe tinde, în probabilitate, către o limită, când numărul de extracţii creşte necontenit.

2. Avem două urne

$$U_1(\lambda_1,\mu_1)\quad \text{şi}\quad U_2(\lambda_2,\mu_2).$$

Din ele se fac extracţii succesive în modul următor: dacă la extracţia de rangul p am obţinut o bilă albă, extracţia de rangul $p+1$ o efectuăm din urna U_1; dacă a ieşit o bilă neagră, extracţia de rangul $p+1$ o efectuăm din urna U_2. Prima extracţie o facem din U_1.

Să se arate că frecvenţa numărului de bile albe în n extracţii succesive, când n creşte necontenit, tinde în probabilitate către o limită.

Să se arate că această convergenţă este puternică.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XI

PROBABILITATEA ERORILOR

1. Considerații generale

Dacă măsurăm o mărime, indiferent de natura ei (lungime, suprafață, volum, greutate, etc.), a cărei valoare exactă este x și rezultatul măsurării este x', diferența

$$\xi = x - x' \tag{1}$$

se numește eroare.

Este evident că rezultatul unor măsurări sau al unor experiențe, în general, este cu atât mai variat, cu cât introducem o precizie mai mare în efectuarea lor. Dacă, de exemplu, cântărim o anumită greutate de mai multe ori și dorim o precizie până la un gram, suntem mai siguri că rezultatele obținute nu vor diferi prea mult între ele. Dacă, dimpotrivă, pretindem o precizie până la un miligram, sau la o fracțiune de miligram, rezultatele vor diferi mult între ele. Spunem că, față de adevărata greutate, rezultatele obținute sunt afectate de erori de observație. Așa dar, erorile de observație sunt inerente măsurărilor de mare precizie și, din această cauză, studiul lor prezintă o mare importanță pentru științele naturii.

Limitându-ne la exemplul de mai sus, constatăm că erorile de observație pot fi de două feluri, și anume:

1) Dacă vom cântări cu un cântar lipsit de precizie, este evident că rezultatul va fi inexact; dacă admitem că în măsurarea pe care o efectuăm nu mai comitem nici o altă eroare, atunci rezultatele vor fi date cu aceeași eroare în plus sau în minus, după construcția greșită a instrumentului nostru de măsurat.

Asemenea erori, datorite imperfecțiunii aparatelor de măsurat, se numesc *erori sistematice*. In general, ele pot fi corectate.

2) Sunt unele erori de natură cu totul diferită de aceea a erorilor sistematice, erori datorite unui complex de împrejurări și care

nu pot fi sesizate individual nici în timpul procesului, nici după procesul de măsurare. Aceste erori convenim să le numim *erori accidentale* şi ele însoţesc, ca şi erorile sistematice dealtfel, fiecare operaţie în parte.

Să considerăm deci mărimea X, a cărei valoare exactă este x, şi să presupunem că am efectuat n măsurări, în aceleaşi condiţii, obţinând rezultatele

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{2}$$

Presupunem că din rezultatele experienţelor noastre au fost eliminate erorile sistematice; deci măsurările făcute sunt afectate numai de erori accidentale.

2. Distribuţia erorilor accidentale

Există o teoremă care domină întreaga teorie a erorilor. Gauss, Laplace şi alţi cercetători au avut intuiţia că erorile accidentale se distribue în jurul unei valori medii, după regulile date de legea normală.

Desigur că o astfel de proprietate, care se leagă de rezultate experimentale, nu poate avea o demonstraţie teoretică decât dacă admitem ca punct de plecare anumite principii justificate de experienţă. Raţiunea şi experienţa ne ajută în scopul urmărit.

Aceste postulate ale teoriei erorilor au fost supuse unor critici foarte severe. In urma acestor critici, demonstraţia dată de Gauss, pe care o vom expune totuşi mai departe dată fiind simplitatea ei, nu mai prezintă astăzi decât un interes istoric.

Dimpotrivă, soluţia dată de Laplace, prin modificările ulterioare ce i s'au adus, a câştigat din ce în ce mai mult în însemnătate, constituind în prezent cea mai satisfăcătoare prezentare a faptului, de mult confirmat de experienţă, că erorile accidentale se supun legii probabilităţilor normale.

Ipotezele dela care a plecat Laplace sunt următoarele:

1) Eroarea finală este suma unui număr foarte mare de erori parţiale, foarte mici.

2) Erorile parţiale sunt independente între ele.

In prima ipoteză, împrejurările care produc erorile parţiale sunt insuficient cunoscute sau nu sunt cunoscute deloc. Nu suntem, prin urmare, în măsură să facem niciun fel de apreciere de ordin cantitativ asupra probabilităţilor ca erorile parţiale să fie de diferite mărimi. Singurul lucru pe care-l putem afirma şi care dealtfel concordă cu experienţa este că aceste erori sunt, în general, foarte mici.

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă și o justificare analitică a presupunerii că eroarea finală se compune în mod liniar din erorile parțiale și nu după altă regulă, exprimată printr'o funcție oarecare, deoarece, dacă această funcție admite o desvoltare în serie de puteri în raport cu variabilele componente, putem lăsa la o parte puterile mai mari decât 1.

Ipoteza (2) a fost pusă mai mult ca o necesitate de calcul, deoarece problema determinării legilor limită în cazul variabilelor dependente, era necunoscută când s'a construit teoria erorilor. Independența variabilelor componente nu este caracteristică pentru sumele care urmează legea normală. Unele cercetări, făcute mai cu seamă în ultima vreme, au arătat că există categorii vaste de variabile dependente, care prin însumare dau naștere, la limită, legii normale a lui Laplace. Pentru aceste motive, ipoteza (2) prezintă o importanță redusă și cu timpul se va ajunge probabil la înlocuirea ei prin alta mai puțin restrictivă.

Dacă admitem ipotezele (1) și (2), legea normală este îndeplinită în majoritatea cazurilor. In acest scop, este suficient să mai presupunem că valorile medii pătratice ale fiecărei erori elementare sunt mai mari decât un număr δ, arbitrar de mic. In definitiv, această condiție trebue să fie satisfăcută, deoarece, atunci când valoarea medie pătratică a unei variabile este nulă, influența hazardului dispare; eroarea nu s'ar mai datori unei întâmplări, ci ar avea o proveniență certă. In acest caz, însă, ea ar ieși din cadrul erorilor accidentale.

Pentru a putea aplica teorema lui Liapunov expusă la pag. 101–105 este suficient să admitem că mărimea erorilor elementare este limitată, ele neputând depăși o anumită valoare L, finită, dar oricât de mare. Această condiție, având în vedere caracteristicele erorilor parțiale, poate fi admisă fără discuție.

Toate aceste condiții fiind îndeplinite, în baza teoremei lui Liapunov reiese că erorile se supun, la limită, legii normale și teorema fundamentală este demonstrată în spiritul ideilor lui Laplace.

Desigur că ipotezele pe care le-am făcut nu sunt singurele care conduc la legea limită a lui Laplace. Deși sunt foarte puțin restrictive, ele mai pot fi totuși lărgite, fără ca rezultatul să se schimbe. Aceasta nu depinde decât de progresul care se va realiza în viitor în teoria probabilităților.

3. Demonstrația lui Gauss

Pentru a demonstra teorema fundamentală pe care am enunțat-o, Gauss a folosit următoarea metodă funcțională:

fie

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

n valori obținute în n observații.

Notăm cu x valoarea exactă, necunoscută nouă, pe care am vrut să o aflăm prin măsurările efectuate și în locul căreia am aflat valorile apropiate de ea $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Erorile accidentale pe care le-am obținut sunt, prin urmare,

$$x-x_1,\ x-x_2, \ldots, x-x_n.$$

Notăm cu $f(x-x_i)\,dx_i$ probabilitatea ca să obținem o eroare cuprinsă între $(x-x_i)$ și $(x-x_i-dx_i)$.

Deoarece măsurările efectuate au fost independente între ele, rezultă că probabilitatea ca din n măsurări să obținem erorile

$$x-x_1,\ x-x_2, \ldots, x-x_n$$

este dată de produsul

$$P(x)=f(x-x_1)\,f(x-x_2)\cdots f(x-x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n.$$

In cazul de față ne interesează nu determinarea probabilității $P(x)$, ci o problemă inversă. Anume, nu vrem să știm care este probabilitatea ca, x fiind dat, să ajungem la valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ci, cunoscând valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vrem să determinăm probabilitatea ca x să fie cauza care le-a produs.

Recurgem deci la formula lui Bayes.

Probabilitatea căutată, pe care o notăm cu $Q(x)$, este astfel dată de relația

$$Q(x)\,dx = \frac{\varphi(x)\,f(x-x_1)\cdots f(x-x_n)\,dx_1\cdots dx_n\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,f(x-x_1)\cdots f(x-x_n)\,dx_1\cdots dx_n\,dx},$$

unde $\varphi(x)\,dx$ reprezintă probabilitatea a priori ca valoarea adevărată, necunoscută nouă, să fie cuprinsă între x și $x+dx$.

Din egalitatea precedentă, prin simplificare, obținem

$$Q(x) = \frac{\varphi(x)\,f(x-x_1)\cdots f(x-x_n)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,f(x-x_1)\cdots f(x-x_n)\,dx}.$$

Pentru a face un pas mai departe, este necesară o nouă ipoteză. Să admitem astfel că valoarea cea mai probabilă a unei mărimi care în n măsurări a dat valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este media aritmetică

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Admițând această ipoteză ca pe un postulat, reiese că probabilitatea $Q(x)$ atinge valoarea ei cea mai mare pentru

$$\xi = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

oricare ar fi valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și n.

In expresia lui $Q(x)$, să observăm că numitorul este o constantă în raport cu x.

Putem deci scrie:

$$Q(x) = C\varphi(x) f(x-x_1) \ldots f(x-x_n),$$

C fiind o constantă față de x.

Dat fiind că valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt arbitrare, să presupunem că

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

$Q(x)$ devine în acest caz

$$Q(x) = C\varphi(x) [f(x-x_1)]^n.$$

Deoarece valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt egale, media lor aritmetică ξ este egală cu $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Știm că valoarea maximă a lui $Q(x)$ se obține pentru valoarea

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Prin urmare

$$Q'(\xi) = 0.$$

Insă

$$Q'(x) = C\varphi'(x) [f(x-x_1)]^n + Cn\varphi(x) f'(x-x_1) [f(x-x_1)]^{n-1}.$$

Deoarece $Q'(\xi) = 0$ și $\xi = x_1$, rezultă din egalitatea de mai sus că

$$\varphi'(\xi) f(0) + n\varphi(\xi) f'(0) = 0.$$

Această egalitate trebue să aibă loc oricare ar fi n.

Prin urmare, trebue să avem separat

$$\varphi'(\xi) f(0) = 0; \quad \varphi(\xi) f'(0) = 0.$$

In plus, aceste egalități se mențin oricare ar fi ξ.

Să observăm că $f(\xi)$ nu poate fi nul pentru oricare valoare a lui ξ, deoarece $\varphi(\xi)$ reprezintă o probabilitate și conform teoremei probabilităților totale trebue să avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, d\xi = 1.$$

Drept consecință, rezultă că $f'(0)=0$. Deci, în punctul $\xi=0$, funcția $f(\xi)$ admite, fie un minim, fie un maxim. Ținând seamă de faptul că $f(\xi)\,d\xi$ este o probabilitate și de semnificația acestei probabilități, rezultă imediat că $f(0)$ reprezintă un maxim.

In orice caz $f(0)=0$.

Egalitatea

$$\varphi'(\xi)f(0)=0$$

ne arată deci că:

$$\varphi'(\xi)=0,$$

sau

$$\varphi(\xi)=\text{const}$$

în raport cu ξ.

Ținând seama de această relație, valoarea lui $Q(x)$, scrisă mai sus, devine

$$Q(x)=Hf(x-x_1)\ldots f(x-x_n)$$

dacă notăm cu H o constantă.

Funcția $Q(x)$ are proprietatea că admite un maxim pentru valoarea

$$\xi=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Derivata logaritmică a lui $Q(x)$

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)}=\frac{f'(x-x_1)}{f(x-x_1)}+\cdots+\frac{f'(x-x_n)}{f(x-x_n)}$$

se anulează deci în punctul ξ.

Astfel

$$\frac{f'(\xi-x_1)}{f(\xi-x_1)}+\cdots+\frac{f'(\xi-x_n)}{f(\xi-x_n)}=0,$$

sau, dacă notăm

$$\xi-x_i=y_i$$

avem

$$\frac{f'(y_i)}{f(y_i)}=F(y_i)$$

$$F(y_1)+\cdots+F(y_n)=0,$$

oricare ar fi valorile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ care îndeplinesc relația

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Diferențiind ambele relații de mai sus, obținem

$$F'(y_1)\,dy_1+\ldots+F'(y_n)\,dy_n=0,$$
$$dy_1+\ldots+dy_n=0.$$

Deoarece aceste relații trebue să fie echivalente, tragem concluzia că

$$F'(y_1)=F'(y_2)=\ldots=F'(y_n).$$

Valorile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt arbitrare, cu condiția să fie îndeplinită relația

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=0.$$

Prin urmare, egalitățile de mai sus nu pot subsista decât dacă

$$F'(y)=a,$$

a fiind o constantă.

Prin integrare, rezultă

$$F(y)=ay+b,$$

b fiind deasemenea o constantă.

Insă

$$F(y_1)+\ldots+F(y_n)=0$$

ori de câte ori

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=0.$$

Inlocuind pe $F(y)$ cu valoarea de mai sus, ajungem la egalitatea

$$a(y_1+y_2+\ldots+y_n)+nb=0,$$

valabilă când

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=0.$$

Prin urmare

$$b=0$$

$$F(y)=ay.$$

Insă

$$F(y)=\frac{f'(y)}{f(y)}.$$

Obținem astfel ecuația diferențială

$$\frac{f'(y)}{f(y)}=ay$$

care, prin integrare, ne dă

$$f(y)=Ce^{\frac{a}{2}y^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $f(y)$ devine maxim pentru $y=0$, după cum am mai arătat, reiese că $\frac{a}{2}$ este negativ.

Putem deci scrie

$$\frac{a}{2} = -h^2.$$

Funcția $f(y)$, pe care o obținem, devine astfel

$$f(y) = C\, e^{-h^2y^2}$$

Pe de altă parte, în baza teoremei probabilităților totale, rezultă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2y^2} dy = 1.$$

Insă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2y^2} dy = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

după cum se vede ușor prin substituția $\theta = hy$.

Obținem deci

$$\frac{C\sqrt{\pi}}{h} = 1,$$

sau

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

Rezultă pentru $f(y)$ expresia:

$$f(y) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2y^2},$$

adică tocmai legea normală.

Obiecții. Impotriva metodei lui Gauss s'au ridicat serioase obiecții. In primul rând, afirmația că probabilitatea de a obține o eroare cuprinsă între $(x-x_i)$ și $(x-x_i-dx_i)$ este dată de o funcție de forma $f(x-x_i)\, dx_i$ nu se poate justifica.

In mod obișnuit, funcția $f(x-x_i)$ nu trebue să depindă numai de diferența $x-x_i$, ci de fiecare variabilă x și x_i în parte. Cu alte cuvinte, probabilitatea de mai sus trebue să aibă forma

$$\varphi(x, x_i)\, dx_i,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\varphi(x, x_i)$ este o funcție de x și x_i. Plecând dela această expresie a probabilității, Poincaré a refăcut demonstrația lui Gauss și a ajuns la alte tipuri de legi finale, care diferă esențial de legea normală.

Deasemenea, a fost pusă la îndoială valabilitatea principiului mediei aritmetice, în baza căruia valoarea cea mai probabilă a unei mărimi, care în n măsurări a dat valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este dată de media aritmetică.

Metoda folosită, fără o adâncă justificare a ipotezelor inițiale, folosirea formulei lui Bayes, care ea însăși nu este la adăpostul oricărei critici, etc. contribue deasemenea la faptul că demonstrația lui Gauss prezintă astăzi un interes limitat la întrebuințarea calculului funcțional, care poate avea în acest domeniu și alte aplicații interesante. Deaceea, am și prezentat această demonstrație.

4. Extindere la cazul mai multor dimensiuni

Rezultatele stabilite până aici se referă la cazul măsurării unei mărimi care are o singură dimensiune. Problema distribuției erorilor de observație se pune, însă, în același mod și cu aceeași necesitate și pentru mărimile cu mai multe dimensiuni.

Să considerăm, astfel, exemplul unei ținte de tragere. Cel care trage cu arma își propune să lovească centrul unui cerc desenat pe o placă dreptunghiulară, așezată la o anumită distanță.

Nimerirea țintei depinde de calitățile trăgătorului. Oricare ar fi însă abilitatea lui, dacă distanța dintre el și placa verticală este destul de depărtată, loviturile trase nu vor intra toate în centrul cercului, ci se vor distribui în jurul lui, într'un mod mai mult sau mai puțin neregulat. Numeroase împrejurări, de care trăgătorul nu-și poate da seama, exercită o influență asupra rezultatelor finale.

Repartiția loviturilor în jurul țintei făcându-se la întâmplare, se pune în mod firesc problema determinării probabilității ca o lovitură să cadă într'o anumită regiune.

Putem interpreta fiecare lovitură ca o eroare față de ținta finală. Pentru cunoașterea ei nu este, însă, suficient să cunoaștem numai distanța care o separă de țintă, ci și poziția ei pe placă. Ajungem astfel la noțiunea de eroare cu două dimensiuni.

Pentru aceste erori, se pot pune toate problemele tratate în cazul unei singure dimensiuni.

In primul rând, ne putem întreba care este legea de probabilitate după care se distribue aceste erori. Astfel, dacă notăm cu $f(x, y)\,dx\,dy$ probabilitatea ca o eroare să cadă în dreptunghiul infinitezimal format din punctele (x, y), $(x+dx, y)$, $(x, y+dy)$, $(x+dx, y+dy)$,

Scanned with OKEN Scanner

presupunând că raportăm punctele din plan la două axe rectangulare $0x$, $0y$, problema fundamentală este să determinăm funcția $f(x, y)$.

In același fel ca în cazul unei singure dimensiuni, se arată că

$$f(x, y) = e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},$$

unde trinomul $ax^2+2bxy+cy^2$ rămâne totdeauna pozitiv, oricare ar fi valorile luate de x și de y[1]).

După cum a arătat Schols, demonstrația lui Gauss, pe care am expus-o în cazul unei singure dimensiuni, rămâne valabilă și în cazul când avem mai multe dimensiuni. Obiecțiile aduse metodei lui Gauss pentru o singură dimensiune nu pot fi înlăturate nici când numărul dimensiunilor este mai mare decât 1.

Pentru acest motiv, demonstrația lui Schols trebue privită ca o indicație vagă, satisfăcătoare în unele aplicații practice, însă insuficientă din punct de vedere teoretic. Principiile pe care s'a bazat demonstrația lui Laplace rămânând valabile, demonstrația se poate transpune la două dimensiuni, cu aceeași rigurozitate.

5. Reducerea la forma canonică

Ecuația

$$f(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2 = h; \quad (b^2-ac>0, a>0),$$

unde $f(x, y)$ este forma pătratică pozitivă întâlnită mai sus, iar h o constantă pozitivă, — reprezintă o elipsă.

Fie OU, OV axele principale ale acestei elipse. Raportând punctele planului la dreptele OU, OV, luate ca axe de coordonate, ecuația elipsei de mai sus devine

$$AU^2+BV^2 = h,$$

A și B fiind două numere pozitive.

Deci, forma pătratică considerată devine

$$\Phi(U, V) = AU^2+BV^2.$$

In acest caz, probabilitatea de a obține o eroare cuprinsă în domeniul infinitezimal (U, V), $(U+dU, V)$, $(U, V+dV)$, $(U+dU, V+dV)$ este dată de expresia

$$Ce^{-(AU^2+BV^2)},$$

[1]) Analitic, această condiție revine la

$$b^2-ac<0; \quad a>0.$$

A şi B fiind două numere pozitive; axele OU, OV se numesc axe principale de probabilitate.

Să observăm că, odată ce sunt date A şi B, constanta C nu este cu totul arbitrară. In adevăr, în baza teoremei probabilităţilor totale

$$C \iint e^{-(AU^2+BV^2)}\, dU\, dV = 1,$$

integrala dublă fiind întinsă la tot planul.

Insă

$$C \iint e^{-(AU^2+BV^2)}\, dU\, dV = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-AU^2} dU \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-BV^2} dV = \frac{\pi C}{\sqrt{AB}} = 1,$$

deoarece

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-AU^2} dU = \frac{C}{\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 d\lambda} = \frac{C\sqrt{\pi}}{\sqrt{A}}.$$

Se obţine astfel

$$C = \frac{\sqrt{AB}}{\pi}.$$

Prin urmare, funcţia care ne dă legea de probabilitate în plan este

$$\frac{\sqrt{AB}}{\pi} e^{-(AU^2+BV^2)}.$$

6. Determinarea legii de probabilitate în cazul general

Este util, pentru aplicaţii, să exprimăm valoarea constantei în funcţie de coeficienţii formei pătratice $ax^2+2bxy+cy^2$.

Pentru aceasta, observăm că trecerea dela sistemul de axe (x, y), la sistemul (U, V) se face printr'o rotire de unghi θ, a cărei expresie analitică se ştie că este dată prin relaţiile

$$x = V \cos \theta - U \sin \theta.$$

$$y = U \sin \theta + V \cos \theta.$$

Pe de altă parte, rezultă

$$ax^2+2bxy+cy^2 = AU^2+BV^2$$

$$a(U\cos\theta - V\sin\theta)^2 + 2b(U\cos\theta - V\sin\theta)(U\sin\theta + V\cos\theta) +$$
$$+ c(U\sin\theta + V\cos\theta) = AU^2+BV^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin identificarea coeficienților, obținem

$$a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta = A,$$
$$a\sin^2\theta - 2b\cos\theta\sin\theta + c\cos^2\theta = B,$$
$$-a\sin^2\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + c\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Prin adunare, din primele două relații, rezultă

$$a + c = A + B. \tag{3}$$

Dacă înmulțim primele două egalități membru cu membru și ținem seamă de a treia, obținem

$$ac - b^2 = AB. \tag{4}$$

In sfârșit, din ultima egalitate se obține relația

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2b}{ac}. \tag{5}$$

Formulele (3), (4), (5) exprimă modul de trecere dela cazul general la forma canonică, și invers.

Am arătat că

$$C = \frac{\sqrt{AB}}{\pi}.$$

Insă, în baza formulei (4)

$$\sqrt{AB} = \sqrt{ac - b^2}.$$

Prin urmare, în cazul general

$$C = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\pi}.$$

Ajungem astfel la următorul rezultat:

Dacă se admite principiul mediei aritmetice, probabilitatea ca să obținem o eroare cuprinsă în dreptunghiul infinitezimal (u, v), $(u+du, v)$, $(u, v+dv)$, $(u+du, v+dv)$ este egală cu

$$\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy,$$

unde exponentul reprezintă o formă pătratică pozitiv definită.

7. Elipse de egală probabilitate

Care este probabilitatea ca o eroare să cadă în interiorul elipsei E, a cărei ecuație este

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = h\,?$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicând principiul probabilităților totale, obținem, pentru această probabilitate, valoarea

$$P_h = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi} \iint\limits_{E_h} e^{-(au^2+2buv+cv^2)} du\, dv.$$

Știm că prin transformarea

$$u = U\cos\theta - V\sin\theta,$$
$$v = U\sin\theta + V\cos\theta,$$

ecuația elipsei E devine:

$$AU^2 + BV^2 = h,$$

iar integrala care ne dă pe P_h se transformă în

$$P_h = \frac{\sqrt{AB}}{\pi} \iint\limits_{E_h} e^{-(AU^2+BV^2)}\, dU\, dV.$$

Această integrală se calculează prin substituția

$$U = \frac{1}{\sqrt{A}}\rho\cos\psi$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{B}}\rho\sin\psi.$$

Obținem astfel

$$P_h = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{E_h} \rho e^{-\rho^2} d\rho\, d\psi.$$

In ultima integrală, ρ variază între 0 și 2, iar ψ, între 0 și $\sqrt{h}$, domeniile de variație ale lui ψ și ρ fiind independente între ele.

Rezultă

$$P_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{h}} ue^{-\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} d\psi = 2\int_0^{\sqrt{h}} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \left(-e^{-\rho^2}\right)_0^{\sqrt{h}} = 1 - e^{-h}.$$

Prin urmare, probabilitatea ca o eroare să cadă în interiorul elipsei E_h este egală cu $1-e^{-h}$.

Utilitatea considerării elipselor E_h reiese din proprietatea de mai sus. Cunoscând probabilitatea $P_h = 1-e^{-h}$ ca o eroare să cadă în

interiorul elipsei E_h, luând n erori la întâmplare, valoarea medie a erorilor care cad în interiorul elipsei este

$$nP_h = n(1-e^{-h}).$$

Compararea acestui număr cu numărul efectiv al erorilor cuprinse în E_h ne dă putința unei verificări practice a legii de probabilitate găsită.

De exemplu, dacă luăm pentru h valorile

$$h_1 = \log \frac{10}{9} = 0{,}10537 \qquad h_4 = \log \frac{10}{6} = 0{,}51083$$

$$h_2 = \log \frac{10}{8} = 0{,}22315 \qquad h_5 = \log \frac{10}{5} = 0{,}69315$$

$$h_3 = \log \frac{10}{7} = 0{,}35668 \qquad h_6 = \log \frac{10}{4} = 0{,}91630$$

$$h_7 = \log \frac{10}{3} = 1{,}20398$$

$$h_8 = \log \frac{10}{2} = 1{,}60944$$

$$h_9 = \log 10 = 2{,}30259$$

(logaritmii calculați în baza e), cele 9 elipse concentrice astfel obținute împart planul în 10 regiuni. In fiecare dintre aceste 10 regiuni, trebue să se găsească aproximativ a zecea parte din numărul total al erorilor.

Legea de probabilitate

$$\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\, dx\, dy,$$

care extinde în plan formula legii normale a lui Laplace, poartă adesea numele lui Bravais, care a considerat-o pentru prima oară

Elipsele E_h poartă denumirea, puțin justificată, de elipse de egală probabilitate. Această denumire este datorită faptului că, dealungul perimetrului unei elipse E_h, densitatea probabilității

$$e^{-(au^2+2buv+cv^2)} = e^{-h}$$

își păstrează valoarea neschimbată.

Scanned with OKEN Scanner

8. Valoarea momentelor de ordinul al doilea

In cazul legii lui Bravais, momentele de ordinul întâi sunt nule. In adevăr

$$M(u)=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\iint ue^{-(au^2+2buv+cv^2)}du\,dv=0,$$

integrala fiind extinsă la tot planul.

Faptul că $M(u)=M(v)=0$ trebue pus în legătură cu aşezarea originii axelor de coordonate în punctul

$$\xi=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\qquad \eta=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},$$

unde am notat prin $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ coordonatele punctelor observate faţă de axele rectangulare iniţiale.

Pentru calculul momentelor de ordinul al doilea folosim substituţia dela pag. 146.

Obţinem astfel

$$M(u^2)=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\iint u^2e^{-(au^2+2buv+cv^2)}du\,dv=$$

$$=\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\iint(U\cos\theta-V\sin\theta)\,e^{-(AU^2+BV^2)}\,dU\,dV=$$

$$=\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\cos^2\theta\iint U^2e^{-(AU^2+BV^2)}\,dU\,dV-$$

$$-2\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\sin\theta\cos\theta\iint UVe^{-(AU^2+BV^2)}\,dU\,dV+$$

$$+\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\sin^2\theta\iint V^2e^{-(AU^2+BV^2)}\,dU\,dV.$$

Insă

$$\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\iint U^2e^{-(AU^2+BV^2)}\,dU\,dV=\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U^2e^{-AU^2}\,dU\int_{-\infty}^{+\infty}V^2e^{-BV^2}\,dV=\frac{1}{2A};$$

$$\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\iint UVe^{-(AU^2+BV^2)}\,dU\,dV=\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Ue^{-AU^2}\,dU\int_{-\infty}^{+\infty}Ve^{-BV^2}\,dV=0;$$

$$\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\iint V^2e^{-(AU^2+BV^2)}\,dU\,dV=\frac{\sqrt{AB}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-AU^2}\,dU\int_{-\infty}^{+\infty}V^2e^{-BV^2}\,dV=\frac{1}{2B}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare

$$M(u^2) = \frac{\cos^2\theta}{2A} + \frac{\sin^2\theta}{2B} \cdot \tag{6}$$

In mod analog, rezultă că

$$M(uv) = \left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{2B}\right) \sin\theta \cos\theta ; \tag{7}$$

$$M(v^2) = \frac{\sin^2\theta}{2A} + \frac{\cos^2\theta}{2B} \cdot \tag{8}$$

Valorile A, B, sunt date, în funcție de a, b, c, prin formulele (3), (4), (5).

Momentele de ordinul al doilea sunt deci determinate prin aceste formule.

9. Determinarea practică a coeficienților care intră în legea lui Bravais

Am stabilit că erorile întâlnite la stabilirea poziției unui punct în plan urmează legea de probabilitate a lui Bravais

$$\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\, dx\, dy.$$

Această lege de probabilitate ne dă indicații destul de precise asupra modului de distribuire a unui număr mare de erori. Se poate, însă, pune și problema inversă, mult mai importantă pentru aplicații, și anume: plecând dela distribuția unui număr mare de erori din plan, să calculăm valoarea numerică a elementelor care compun legea lui Bravais.

Să presupunem, astfel, că suntem în prezența a n erori de poziție

$$P_1, P_2, \ldots, P_n,$$

având respectiv următoarele coordonate:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Pentru determinarea legii lui Bravais, care a dus la această distribuție de erori, este suficient să cunoaștem poziția și mărimea axelor principale de probabilitate pentru o elipsă E_h, de parametru h cunoscut.

Scanned with OKEN Scanner

Punctul de intersecție al axelor principale de probabilitate se obține din relațiile

$$\xi = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

$$\eta = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n},$$

dacă notăm cu (ξ, η) coordonatele lui în sistemul de axe ales.

Prin punctul (ξ, η) ducem două axe perpendiculare, față de care raportăm punctele planului. Un punct M, care în primul sistem avea coordonatele (x, y), în noul sistem va avea coordonatele (u, v).

Punctele

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

vor avea respectiv coordonatele

$$(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n).$$

Dacă numărul n este destul de mare, obținem egalitățile aproximative

$$\left.\begin{aligned} M(u^2) &= \frac{u_1^2 + \cdots + u_n^2}{n} = L; \\ M(uv) &= \frac{u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n}{n} = M; \\ M(v^2) &= \frac{v_1^2 + \cdots + v_n^2}{n} = N. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Valoarea numerică a expresiilor L, M, N este deci cunoscută.

Aplicând formulele (6), (7), (8), avem de rezolvat sistemul de ecuații în A, B, θ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\cos^2\theta}{A} + \frac{\sin^2\theta}{B} = 2L; \\ &\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \sin\theta\cos\theta = 2M; \\ &\frac{\sin^2\theta}{A} + \frac{\cos^2\theta}{B} = 2N. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Sistemul de mai sus se rezolvă imediat. Scăzând ecuația a treia din prima, obținem:

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2(L - N)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\cos 2\theta=2(L-N).$$

Pe de altă parte, ecuația a doua se poate scrie

$$\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\sin 2\theta=4M.$$

Împărțind această ecuație la precedenta, rezultă

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2M}{L-N}.$$

De aici calculăm valoarea lui θ, pe care o introducem în (10) și obținem imediat pe A și B.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XII

TEORIA DISPERSIUNII

1. Consideraţii generale

Am văzut că teoria probabilităţilor este o disciplină matematică riguros construită pe baza axiomatizării date de Kolmogorov. Se pune, însă, întrebarea cum s'au născut axiomele teoriei probabilităţilor din datele lumii reale, care sunt fenomenele naturale la care se aplică acest calcul şi care este puntea de legătură dintre teoria matematică abstractă şi realitatea concretă care permite aceste aplicaţii. La aceste întrebări am răspuns când am definit probabilitatea. Am văzut că axiomele teoriei probabilităţilor, întocmai ca şi axiomele celorlalte discipline matematice, nu sunt arbitrare, ci rezultă din studiul îndelungat al fenomenelor naturale şi din cunoaşterea legilor lor de desvoltare. Calculul probabilităţilor se aplică numai la fenomenele de masă care se bucură de proprietatea că, repetându-se de un număr mare de ori, frecvenţa lor este foarte apropiată de un număr constant care caracterizează obiectiv fenomenul. Aceasta este puntea de trecere între teoria matematică a probabilităţilor şi lumea reală.

La definirea probabilităţii am văzut că se ajunge şi pe cale statistică.

In alte cazuri, în experienţele efectuate variază şi procesul de obţinere a frecvenţei, astfel încât nu se poate vorbi de o probabilitate constantă. De exemplu, putem să facem n experienţe, constând fiecare în extragerea unui număr de N bile respectiv din urnele $U_1, U_2, \ldots, U_n$, care nu au aceeaşi compoziţie. In acest caz, compararea fenomenului cu urna lui Bernoulli nu este justă. In schimb, este folositor să-l comparăm cu o altă schemă simplă, cunoscută, pentru care acest lucru este cu putinţă.

Aceasta este o a doua categorie de probleme care sunt studiate în teoria clasică a dispersiunii.

Ne vom ocupa deocamdată de condițiile în care un anumit fenomen poate sau nu să fie reprezentat printr'o schemă a urnei lui Bernoulli, ceeace înseamnă a stabili dacă în cursul unei experiențe efectuate în aceleași condiții, însă independente unele de altele, probabilitatea de realizare a evenimentului rămâne sau nu constantă.

Această idee se datorește lui J. Bernoulli care a aplicat-o cel dintâi la studiul fenomenului mortalității. El a observat că frecvențele mortalității unui grup de indivizi pot fi asimilate cu frecvențele care arată numărul de bile extrase dintr'o urnă cu o compoziție cunoscută de bile albe și negre și care își păstrează compoziția în tot timpul extracțiilor; deci, probabilitatea de a extrage o bilă albă din urnă rămâne tot timpul extracțiilor o valoare constantă.

Criteriile pe care le vom da mai departe se bazează, după cum vom vedea, pe noțiunea dată la început de dispersiune sau împrăștiere a fenomenului și, în special, pe determinarea așa numitului coeficient de dispersiune.

Să notăm cu

$$f_1, f_2, \ldots, f_r \tag{1}$$

frecvențele unui eveniment obținute în r experiențe și să presupunem că în fiecare experiență au fost observate n cazuri. Dacă în prima experiență evenimentul s'a realizat de α_1 ori, în a doua, de α_2 ori, etc., rezultă

$$f_i = \frac{\alpha_i}{n}, \tag{2}$$

unde $i = 1, 2, \ldots, r$.

In totalul de r experiențe avem nr cazuri observate și

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

cazuri în care s'a verificat fenomenul. Frecvența medie este deci

$$f = \frac{1}{rn} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i. \tag{3}$$

Admițând că frecvențele pot fi considerate ca aparținând unei urne a lui Bernoulli, de probabilitate constantă p, diferența $f-p$ trebue să verifice inegalitatea cunoscută

$$|f-p| < 3\sqrt{\frac{p-q}{nr}}, \tag{4}$$

cu o probabilitate care tinde către 0,997 când n crește nelimitat; aceasta, în baza faptului că legea limită redusă a numărului de

Scanned with OKEN Scanner

câte ori se prezintă o bilă de culoare dată în urna lui Bernoulli tinde la limită către legea normală a lui Laplace.

De altă parte, avem relaţia

$$p+q=1\,; \qquad (p,\ q>0).$$

Produsul pq va fi maxim atunci când factorii sunt egali, adică atunci când $p=q$

$$pq \leq \frac{1}{4}\,.$$

In acest caz, putem scrie inegalitatea

$$3\sqrt{\frac{pq}{nr}} < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{nr}}\,,$$

deci

$$|f-p| < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{nr}}\,. \tag{5}$$

Pentru valori suficient de mari date lui n şi r, rezultă că putem înlocui probabilitatea necunoscută p cu frecvenţa medie f obţinută experimental.

Deasemenea, vom înlocui adevăratele abateri

$$\xi_i = \frac{\alpha_i}{n} - p \tag{6}$$

prin abaterile aparente

$$\xi' = \frac{\alpha_i}{n} - f. \tag{7}$$

Pentru valori mari ale lui n, abaterile ξ_i reprezintă abaterile relative ale legii normale. Probabilitatea ca să avem abaterea

$$\frac{\alpha}{n} - p = \xi$$

este dată asimptotic de formula

$$P_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2npq}}\,.$$

Să notăm, ca deobicei, cu μ valoarea medie pătratică corespunzătoare şirului de abateri (6), care este dată de relaţia

$$\mu^2 = \frac{pq}{n}\,. \tag{8}$$

Deoarece nu cunoaștem valoarea probabilității p, trebue să calculăm și pentru μ^2 o valoare apropiată, așa cum am făcut și pentru p. Deoarece $q=1-p$, vom lua

$$\mu^2=\frac{pq}{n}\approx\frac{f(1-f)}{n}.$$

Valoarea empirică a lui μ^2 pentru șirul (7) este

$$\mu'^2=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{n}-f_i\right)^2. \tag{9}$$

Valorile μ^2 și μ'^2 sunt legate între ele din punct de vedere probabilistic în același mod în care sunt legate frecvențele de probabilitate. Să introducem variabila:

$$X_i=\frac{\alpha_i}{n}-p,$$

unde $i=1, 2, \ldots, r$. Putem scrie relațiile

$$\mu^2=M(X_i^2);\quad \mu'^2=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}X_i^2.$$

Diferența dintre ele

$$\mu'^2-\mu^2=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(X_i^2-\mu^2)$$

dă r variabile independente, fiecare având valoarea medie nulă. Deoarece valorile medii ale variabilelor X_i sunt aceleași, putem scrie

$$M(\mu'^2-\mu^2)^2=\frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}M(X_i^2-\mu^2)^2=\frac{1}{r}M(X_i^2-\mu^2)^2$$

sau încă, dacă desvoltăm ultimul pătrat,

$$M(\mu'^2-\mu^2)^2=\frac{1}{r}[M(X_i^4)-2\mu^2M(X_i^2)+\mu^4]=\frac{1}{r}(m_4-\mu^4)$$

unde

$$m_4=M(X_i^4)=3\mu^4.$$

Deci

$$M(\mu'^2-\mu^2)^2=\frac{2}{r}\mu^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, putem scrie inegalitatea îndeplinită conform cu (5) din punct de vedere practic

$$(\mu'^2-\mu^2)<3\mu^2\sqrt{\frac{2}{r}}$$

sau

$$\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}-1\right)<3\sqrt{\frac{2}{r}},$$

ceeace echivalează cu relaţiile

$$1-\sqrt{\frac{2}{r}}\leq\frac{\mu'^2}{\mu^2}\leq 1+\sqrt{\frac{2}{r}}. \tag{10}$$

Să introducem notaţia

$$Q^2=\frac{\mu'^2}{\mu^2}. \tag{11}$$

Q se numeşte coeficient de dispersiune al seriei considerate şi el trebue să verifice inegalităţile

$$1-3\sqrt{\frac{2}{r}}\leq Q^2\leq 1+3\sqrt{\frac{2}{r}}. \tag{12}$$

Pentru valori mari ale lui r, coeficientul de dispersiune oscilează în jurul lui 1, fiind totdeauna cuprins în limitele (12).

Fenomenul pentru care aceste condiţii sunt îndeplinite se spune că admite o dispersiune normală.

Abaterile $\eta_i=\frac{\alpha_i}{n}-f_i$ trebue să se comporte în acelaşi fel ca frecvenţele corespunzătoare unei legi normale cu valoarea medie pătratică egală cu μ'^2; în consecinţă, aceste valori trebue să se grupeze în jurul valorii zero după anumite legi bine determinate.

Pe de altă parte, probabilitatea inegalităţii

$$\left|\frac{\alpha_i}{n}-p\right|<t\mu$$

tinde la limită, după cum ştim, către

$$\frac{1}{\mu\sqrt{2}}\int_{-t\mu}^{t\mu}e^{-\frac{\xi}{2\mu^2}}d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}e^{-x^2}dx=H\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

unde funcţia $H(\lambda)$ este dată de formula cunoscută

$$H(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-\lambda^2}d\lambda.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, în baza valorilor apropiate pe care le-am găsit, probabilitatea ca să obținem relațiile

$$\left|\frac{\alpha_i}{n}-f\right|<\mu'$$

tinde la limită către $H\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.

De exemplu, pentru inegalitatea

$$\left|\frac{\alpha_i}{n}-f\right|<\mu'$$

găsim la limită probabilitatea

$$H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0{,}6826,$$

ceeace înseamnă că aproximativ $68^0/_0$ din valorile η_i vor trebui să fie mai mici decât μ'.

In mod analog, inegalității

$$\left|\frac{\alpha_i}{n}-f\right|<2\mu'$$

îi corespunde la limită probabilitatea

$$H(\sqrt{2})=0{,}9545,$$

adică $95^0/_0$ din abaterile η_i se găsesc în intervalul $(-2\mu', +2\mu')$.

In concluzie, pentru diferitele valori date lui t, funcția $H\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ ne dă procentul abaterilor care se găsesc cuprinse în intervalul $(-t\mu', +t\mu')$.

Când abaterile η_i îndeplinesc aceste condiții, spunem că seria examinată este tipică.

Prin urmare, dacă fenomenul cercetat admite o dispersiune normală și succesiunea abaterilor (7) este tipică, el poate fi reprezentat prin schema probabilistică a urnei lui Bernoulli.

In mod practic, deci, vom efectua succesiv următoarele operații:

1. Frecvența medie

$$f=\frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i.$$

2. Valorile medii pătratice

$$\mu^2\approx\frac{f(1-f)}{n};\quad \mu'^2=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{n}-f_i\right)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Coeficientul de dispersiune

$$Q^2 = \frac{\mu'^2}{\mu^2}.$$

4. Verificarea inegalităților (12).

5. Comparația cu valorile funcției $H(\lambda)$.

Condițiile 1—4 ne asigură normalitatea dispersiunii, iar probabilitatea 5 ne arată dacă seria abaterilor aparente este sau nu tipică.

Aplicație. Statisticienii au aplicat criteriile de mai sus la studiul fenomenului mortalității, ajungând, pentru vârstele obișnuite, la rezultate satisfăcătoare; excepție face mortalitatea infantilă, unde coeficientul de dispersiune este mult mai mare decât 1.

Ca exemplu, citățm valorile coeficientului de dispersiune, calculat pentru populația observată la construirea tabelelor de mortalitate H^m, folosite în asigurări.

Vârsta x	Coeficientul de dispersiune Q
25	0,67
30	1,43
40	1,04
50	0,95
60	1,17
70	0,99

Deoarece valorile lui Q oscilează în jurul lui 1, tragem concluzia că fenomenul admite o dispersiune normală.

Vom da încă un exemplu după tabelele germane de mortalitate, construite după materialul statistic furnizat de societățile de asigurare Gotha și Leipzig, pentru grupe de vârste de câte 5 ani.

Grupa de vârste	Coeficientul de dispersiune Q	
	Gotha	Leipzig
26—30	0,8	1,0
31—35	0,8	1,8
36—40	1,3	1,5
41—45	0,9	1,1
46—50	0,9	0,8
51—55	0,8	1,2
56—60	1,2	1,1
61 65	1,0	0,9
66—70	1,0	0,9
71—75	1,1	1,0
76—80	1,2	1,1

Scanned with OKEN Scanner

Deasemenea, constatăm aceeaşi oscilaţie în jurul lui 1, deci suntem în prezenţa unei dispersiuni normale.

Verificările experimentale, efectuate după metodele pe care le-am arătat, au permis deci să se tragă concluzia că există o probabilitate de viaţă pentru un interval de timp nu prea lung şi pentru o masă omogenă de indivizi, cu ajutorul căreia putem măsura din punct de vedere probabilistic mărimea frecvenţelor mortalităţii unui grup de indivizi.

Această concluzie şi-a găsit o largă aplicaţie în asigurări, a căror întreagă teorie a fost clădită cu ajutorul calculului probabilităţilor. Acordul desăvârşit între previziunile teoretice şi realizările practice în asigurări dovedeşte utilitatea reprezentării mortalităţii cu ajutorul schemei lui Bernoulli.

2. Utilizarea schemei lui Poisson

După cum se ştie, schema probabilistică a lui Poisson constă în faptul că evenimentul E are în n probe probabilităţile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, adică probabilităţile variază dela o probă la alta.

Să considerăm o experienţă compusă din n asemenea probe şi să presupunem să s'au efectuat r experienţe, în care evenimentul s'a realizat cu frecvenţele:

$$f_i = \frac{\alpha_i}{n} \tag{13}$$

unde $i = 1, 2, \ldots, r$.

Mai precis, avem n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$, cu probabilităţile respective $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Se efectuează din fiecare urnă câte o extracţie în ordinea indicată. Să presupunem că, după n probe, în experienţa de rangul i, a rezultat frecvenţa f_i.

Probabilităţile p_i sunt necunoscute.

Deaceea, în lipsa oricăror alte date asupra frecvenţelor (13), vom pune ipoteza simplă că ele sunt valorile empirice ale unei probabilităţi necunoscute, constantă dela o probă la alta şi pentru care se poate lua ca valoare plauzibilă media

$$f_i = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i, \tag{14}$$

de unde rezultă succesiunea de abateri aparente

$$\frac{\alpha i}{n} - f \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

și valoarea medie pătratică

$$\mu'^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_i}{n} - f \right)^2 . \tag{16}$$

In ipoteza făcută, adică a unei probabilități constante, μ'^2 trebue comparat cu valoarea

$$\mu_1^2 = \frac{f(1-f)}{n},$$

din care deducem

$$Q'^2 = \frac{\mu'^2}{\mu_1^2} = \frac{1}{rf(1-f)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{n} - f \right)^2 .$$

Valoarea acestui coeficient este mai mică decât 1. Pentru demonstrație, să considerăm probabilitatea medie

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{17}$$

și valoarea medie pătratică

$$\mu''^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_i}{n} - p \right)^2 . \tag{18}$$

Comparând μ'^2 cu $\frac{pq}{n}$, obținem

$$Q^2 = \frac{n}{rpq} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{n} - p \right)^2 . \tag{19}$$

In loc de a dovedi că $Q'^2 < 1$, vom dovedi că $Q^2 < 1$, deoarece $Q^2 \approx Q'^2$. In acest scop, scriem egalitatea

$$Q^2 = \frac{\mu''^2}{\mu^2} \cdot \frac{\mu^2}{\left(\frac{pq}{n} \right)},$$

unde μ^2 este dat de formula cunoscută

$$\mu^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i .$$

Raportul $\frac{\mu''^2}{\mu^2}$ oscilează în jurul lui 1, iar raportul

$$\frac{\mu^2}{\left(\frac{pq}{n} \right)} = \frac{1}{npq} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i < 1.$$

In adevăr, avem identitatea:

$$npq = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i + \sum_{i=1}^{n} (p - p_i)^2$$

care se verifică uşor cu ajutorul relaţiilor

$$np = \sum_{i=1}^{n} p_i; \quad q = 1 - p; \quad q_i = 1 - p_i,$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

Impărţind prin npq ambele părţi ale identităţii de mai sus şi neglijând termenul pozitiv

$$\frac{1}{npq} \sum_{i=1}^{n} (p - p_i)^2,$$

obţinem

$$1 > \frac{1}{npq} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = \frac{\mu^2}{\left(\frac{pq}{n}\right)}.$$

In concluzie, fiind dată seria de frecvenţe relative obţinute în r experienţe

$$\frac{\alpha_1}{n}, \quad \frac{\alpha_2}{n}, \ldots, \frac{\alpha_r}{n}$$

formăm valorile medii pătratice

$$\mu_1^2 = \frac{f(1-f)}{n}; \quad \mu'^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_i}{n} - f\right)^2,$$

din care deducem coeficientul de dispersiune

$$Q'^2 = \frac{\mu'^2}{\mu_1^2}.$$

Dacă probabilitatea evenimentului cercetat variază dela o probă la alta (rămânând evident neschimbată dela o experienţă la alta), coeficientul de dispersiune Q' este mai mic decât 1.

Spunem, în acest caz, că suntem în prezenţa unei dispersiuni subnormale.

Avem deci un criteriu simplu pentru a constata dacă probabilitatea a rămas aceeaşi la fiecare probă sau a variat dela probă la probă.

Scanned with OKEN Scanner

3. Tabela lui Czuber

Vom reproduce mai departe, după Czuber[1]) o tabelă înfăţişând rezultatul a 18 serii de câte 200 extracţii (probe) dintr'o urnă. Se presupune că modalităţile extracţiilor sunt necunoscute pentru fiecare serie, dar se ştie că aceste modalităţi nu variază dela o serie la alta. Se cere să se verifice dacă urna a păstrat o compoziţie constantă în cele 200 extracţii.

Rezultatele experienţelor sunt date în următoarea tabelă:

	f	L	L^2
1	0,485	−0,007	0,000049
2	0,465	−0,027	0,000729
3	0,485	−0,007	0,000049
4	0,485	−0,007	0,000049
5	0,490	−0,002	0,000004
6	0,460	−0,032	0,001024
7	0,505	+0,013	0,000169
8	0,505	+0,013	0,000169
9	0,515	+0,023	0,000529
10	0,505	+0,013	0,000169
11	0,500	+0,008	0 000064
12	0,510	+0,018	0,000324
13	0,480	−0,012	0,000144
14	0,515	+0,023	0,000529
15	0,490	−0,002	0,000004
16	0,515	+0,023	0,000529
17	0,450	−0,042	0,001764
18	0,495	+0,003	0,000009
	8,855	−0,001	0,006307

Prima coloană arată numărul de ordine al seriei; a doua, frecvenţa obţinută; a treia, abaterea L a frecvenţei dela media aritmetică a frecvenţelor, iar a patra, pătratul lui L.

Media aritmetică a frecvenţelor este

$$p_0 = \frac{8,855}{18} = 0,492;$$

$$\mu''^2 = \frac{0,006307}{18} = 0,00035;$$

$$\mu_1'^2 = \frac{0,492 \cdot 0,508}{200} = 0,00125.$$

[1]) Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vol. I, pag. 333.

Coeficientul de dispersiune este

$$Q^{r2} = \frac{\mu'^2}{\mu_1^2} = \frac{35}{125} = 0{,}28.$$

Se constată că acest raport este cu mult mai mic decât 1. Diferența $1 - Q^{r2} = 0{,}72$ depășește dublul valorii medii pătratice

$$\sqrt{\frac{2}{r}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = 0{,}33,$$

astfel încât nu poate fi considerată întâmplătoare.

Suntem în cazul unei dispersiuni subnormale.

In realitate, fiecare dintre cele 18 serii de câte 200 extracții a fost formată în modul următor: dintr'o urnă, s'au făcut 100 extracții, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă, cu probabilitatea $\frac{1}{6}$ de a scoate o bilă albă, și 100 extracții în mod similar, dintr'o urnă cu probabilitatea $\frac{5}{6}$ de a extrage o bilă albă.

După cum se vede, previziunea teoretică corespunde realității.

Desigur că nu are sens să aplicăm teoria dispersiunii la exemple lipsite de interes practic, ca cel de mai sus. Insă, comparația cu urna lui Poisson ne arată ce concluzii trebue să tragem atunci când întâlnim serii statistice care duc la o dispersiune subnormală.

Să presupunem că ne interesează mortalitatea unui grup de indivizi, având diferite profesii. Dacă, examinând frecvențele mortalității pe o perioadă scurtă de timp, ajungem la un coeficient de dispersiune subnormal, aceasta înseamnă că mortalitatea nu poate fi considerată aceeași pentru toate profesiile.

4. Schema cu dispersiune supranormală

Să considerăm acum o schemă de urne din care rezultă o dispersiune supranormală.

In acest caz, avem deasemenea o serie de r frecvențe.

Fiecare frecvență

$$\frac{\alpha_i}{n}; \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

arată de câte ori a ieșit o bilă albă în seria de rangul i, constând în extracția a n bile, după modelul urnei lui Bernoulli.

Fiecare serie de experiențe se efectuează dintr'o urnă diferită. Avem deci de considerat urnele $U_1, U_2, \ldots, U_n$, cu probabilitățile

respective $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de a scoate o bilă albă; efectuăm câte n extracţii în mod consecutiv din fiecare dintre aceste urne.

Probabilităţile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt necunoscute.

In schimb, cunoaştem frecvenţele

$$f_i = \frac{\alpha_i}{n}; \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Media aritmetică a acestei frecvenţe

$$f = \frac{\Sigma \alpha_i}{nr}$$

ne dă o valoare apropiată de media aritmetică a probabilităţilor necunoscute.

Să notăm

$$\mu'^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_i}{n} - f \right)^2$$

μ'^2 reprezintă o valoare empirică. Pentru un număr mare de experienţe, μ'^2 nu va diferi prea mult de media teoretică corespunzătoare.

Din formula care ne dă pe f, deducem

$$M(f) = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}.$$

Să notăm, în consecinţă

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}.$$

Inlocuind pe f prin p, vom avea de calculat valoarea medie

$$\mu^2 = \frac{1}{r} \sum M \left(\frac{\alpha_i}{n} - p \right)^2.$$

Insă

$$\left(\frac{\alpha_i}{n} - p \right)^2 = \left(\frac{\alpha_i}{n} - p_i \right)^2 + 2(p_i - p) \left(\frac{\alpha_i}{n} - p_i \right) + (p - p_i)^2.$$

Rezultă

$$M \left(\frac{\alpha_i}{n} - p \right)^2 = \frac{p_i q_i}{n} + (p - p_i)^2.$$

Aceasta, deoarece ştim din studiul urnei lui Bernoulli că:

$$M \left(\frac{\alpha_i}{n} - p \right)^2 = \frac{p_i q_i}{n}; \quad M \left(\frac{\alpha_i}{n} - p_i \right) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare

$$\mu^2 = \frac{\Sigma p_i q_i}{nr} + \frac{\Sigma (p - p_i)^2}{r}.$$

Am arătat, însă, că

$$rpq = \sum p_i q_i + \sum (p - p_i)^2.$$

Inlocuind în formula precedentă pe $\sum p_i q_i$ cu valoarea obținută din această relație, rezultă:

$$\mu^2 = \frac{pq}{n} + \frac{n-1}{nr} \sum_{i=1}^{r} (p - p_i)^2.$$

Să considerăm coeficientul de dispersiune, determinat de raportul

$$Q^2 = \frac{\mu'^2}{\mu_1^2},$$

unde am notat

$$\mu_1^2 = \frac{f(1-f)}{n}.$$

Valoarea lui Q'^2 pentru valorile mari ale lui n nu diferă sensibil de

$$Q^2 = \frac{\mu^2}{\mu_1^2},$$

unde am notat

$$\mu_1^2 = \frac{pq}{n}.$$

Insă

$$Q^2 = 1 + \frac{n-1}{r} \frac{\Sigma (p - p_i)^2}{pq} > 1.$$

Se ajunge prin urmare la o dispersiune supranormală.
Dacă avem, prin urmare, o succesiune de frecvențe

$$f_i = \frac{\alpha_i}{n}; \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

pentru care coeficientul de dispersiune $Q^2 > 1$, putem trage concluzia că probabilitatea nu a rămas aceeași pentru toate frecvențele.

Reluând exemplul mortalității, să presupunem că, examinând frecvențele corespunzătoare mortalității unui grup de n indivizi pe timp de t ani, constatăm o dispersiune supranormală. Tragem de aici concluzia că mortalitatea grupului a variat sensibil în timpul considerat.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii: După cum am văzut, pentru explicarea fenomenelor statistice variabile în timp sau în spaţiu s'au imaginat diferite scheme bazate, la început, pe principiul unei probabilităţi constante şi al independenţei variabilelor considerate. Din aceste scheme simple s'au dedus altele, în care probabilitatea constantă a fost înlocuită cu o funcţie de probabilităţi; astfel au fost găsite cele trei cazuri de dispersiune cunoscute în statistică: dispersiunile normale, subnormale şi supranormale. Totdeauna, însă, la baza acestor cercetări a stat independenţa variabilelor care compun frecvenţele şirului statistic cercetat.

Toate rezultatele expuse până aici sunt adevărate în cazul variabilelor independente, dar pot fi extinse şi la variabilele dependente. Vom dovedi, astfel, că anumite fenomene statistice, formate din variabile dependente, dau naştere la o dispersiune supranormală, deşi formează o succesiune tipică şi condiţiile lor de desvoltare au rămas aceleaşi în tot timpul formării lor, sau că există grupuri omogene care să prezinte o dispersiune subnormală, fără să fie formate dintr'o sumă de fenomene statistice, ca în cazul urnei lui Poisson. Un studiu direct al problemei dispersiunii poate deci conduce la rezultate interesante în cazul variabilelor dependente.

In loc să considerăm o singură urnă, pornim dela trei urne U, U', U'', în care se găsesc bile albe şi negre într'o proporţie dată. Fie p, p', p'' probabilităţile respective de a scoate o bilă albă din fiecare dintre urnele de mai sus, iar q, q', q'' probabilităţile lor contrare ($p+q=1$; $p'+q'=1$; $p''+q''=1$).

Prima extracţie o efectuăm din urna U. Dacă bila extrasă a fost albă, extracţia următoare o efectuăm din urna U'; dacă bila a fost neagră, extracţia următoare urmează a fi făcută din U''. Extracţia continuă în acelaşi mod, având grija ca, după fiecare extracţie, să punem bila înapoi în urna din care a fost extrasă, astfel încât compoziţiile urnelor U' şi U'' să rămână mereu aceleaşi.

Vom efectua astfel n extracţii succesive din cele două urne U' şi U'', punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urna respectivă şi vom face o extracţie din urna U' când bila precedentă a fost albă şi din U'', când bila precedentă a fost neagră. Procedând astfel, din n extracţii succesive obţinem t bile albe şi $n-t$ bile negre. Dacă această experienţă se repetă de un număr oarecare de ori, se obţine un şir de frecvenţe $\frac{t_i}{n}$.

Fie s numărul frecvenţelor considerate.

Am obţinut deci şirul

$$\frac{t_1}{n}, \frac{t_2}{n}, \ldots, \frac{t_s}{n}. \qquad (20)$$

Necunoscând decât aceste frecvenţe, ce se poate afirma despre dispersiunea căreia îi dau naştere?

Dacă se presupune că şirul (20) este format din determinările empirice ale unei probabilităţi presupuse constante în cele două exemple, vom obţine o valoare aproximată a acestei probabilităţi prin formula

$$p_0 = \frac{t_1 + t_2 \cdots + t_s}{ns} \tag{21}$$

care reprezintă frecvenţa totală a numărului de bile albe obţinute în aceste s experienţe.

Abaterile aparente obţinute sunt

$$\frac{t_1}{n} - p_0, \frac{t_2}{n} - p_0, \ldots, \frac{t_s}{n} - p_0. \tag{22}$$

Abaterile adevărate le obţinem în modul următor:

Rezultatele extracţiilor succesive sunt nişte variabile aleatorii

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \tag{23}$$

care pot lua valorile 1 sau 0, după cum bila rezultată dintr'o extracţie este albă sau neagră. Notăm prin $p_1, p_2, \ldots, p_n$ probabilităţile a priori ale şirului (23) şi prin p expresia

$$\frac{1}{n}\left(p_0 + p_1 + \cdots + p_n\right).$$

Probabilităţile a priori reprezintă o noţiune fundamentală în studiul variabilelor dependente. Trebue să observăm că variabilele X_1 sunt dependente, şi anume variabila X_{n+1} depinde de variabila precedentă în modul următor: dacă am avut $X_n = 1$, probabilitatea ca $X_{n+1} = 1$ este egală cu p', oricare ar fi valorile luate de variabilele anterioare X_{n-1}, X_{n-2}, X_1; dacă $X_n = 0$, probabilitatea ca $X_{n+1} = 1$ este egală cu p'', deasemenea, oricare ar fi valorile luate de variabilele precedente. Variabilele (23) sunt deci dependente, dar pentrucă legătura dintre X_{n+1} şi variabilele anterioare se face numai prin X_n, vom spune că ele formează un lanţ, şi anume un lanţ Markov simplu, după numele ilustrului probabilist rus care le-a introdus în ştiinţă.

Am văzut că în studiul unui şir de variabile aleatorii se introduc probabilităţile p' şi p'', care sunt probabilităţi condiţionate. Ele ne dau probabilitatea efectivă de a obţine $X_n = 1$, după ce cunoaştem în mod efectiv valorile luate de variabilele care preced pe

X_n. Ne putem, însă, întreba care este probabilitatea ca $X_n=1$ înainte de a efectua șirul de experiențe care ne duce la cunoașterea valorilor luate de variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Această probabilitate, pe care o notăm cu p_n, poartă numele de probabilitate a priori.

Abaterile adevărate sunt:

$$\frac{t_1}{n}-p,\ \frac{t_2}{n}-p,\ \ldots,\ \frac{t_s}{n}-p. \tag{24}$$

Înlocuind șirul (24), necunoscut, cu șirul (22), cunoscut, se comit erori al căror ordin de mărime este $\frac{1}{ns}$, după cum vom dovedi; deci, pentru n și s mari, adică în cazul care ne interesează, erorile obținute prin această înlocuire sunt neglijabile.

Extracțiile efectuate le descompunem în s extracții pentru variabila X_1, în s extracții pentru variabila $X_2\ldots$, în s extracții pentru variabila X_n.

Conform acestei descompuneri putem deci scrie:

$$p_0=\frac{\sum_{i=1}^{s}[X_1^{(i)}+X_2^{(i)}+\cdots+X_n^{(i)}]}{ns}. \tag{25}$$

Din (25) rezultă

$$M(p_0)=\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n};$$

$$M(p_0)=p,$$

sau

$$M(p-p_0)=0. \tag{26}$$

Valoarea medie a lui p_0 fiind p, trebue să calculăm expresia $M(p_0-p)^2$, care, după teorema lui Cebâșev, ne servește ca un instrument de măsurare a erorilor pe care le obținem.

Avem

$$p_0-p=\frac{1}{ns}\sum_{i=1}^{s}[X_1^{(i)}+X_2^{(i)}+\ldots+X_n^{(i)}]-\frac{1}{n}(p_1+p_2+\cdots+p_n).$$

Sau

$$p_0-p=\frac{1}{ns}\sum_{i=1}^{s}[(X_1^{(i)}-p_1)+(X_2^{(i)}-p_2)+\cdots+(X_n^{(i)}-p_n)].$$

Scanned with OKEN Scanner

Expresiile

$$[(X_1^{(i)}-p_1)+(X_2^{(i)}-p_2)+\ldots+(X_n^{(i)}-p_n)]$$

sunt independente între ele când i variază, iar valoarea medie a fiecăreia dintre ele este nulă. Aceasta, pentru motivul că frecvențele X_i sunt independente între ele, ca rezultate ale unor experiențe care nu au legătură între ele. Valoarea medie pătratică a unei sume de variabile independente, având fiecare valoarea medie nulă, este egală însă cu suma valorilor medii pătratice ale variabilelor deci:

$$M(p_0-p)=\frac{B_n}{sn^2}, \tag{27}$$

unde am notat:

$$B_n=M[(X_1^{(i)}-p_1)+(X_2^{(i)}-p_2)+\ldots+(X_n^{(i)}-p_n)]^2;$$

B_n este o funcție de n, independentă de i.

Pentru folosirea formulei (27), suntem conduși să găsim valoarea asimptotică a lui B_n.

Se vede ușor că avem relațiile:

$$\begin{aligned} p_1&=pr+p''\\ p_2&=p_1r+p''\\ p_3&=p_2r+p''\\ &\cdots\cdots\\ p_n&=p_{n-1}r+p'', \end{aligned}$$

unde $r=p'-p''$.

Deducem imediat

$$p_n=pr^n+\frac{1-r^n}{1-r}p'' \tag{28}$$

și în mod analog

$$q_n=qr^n+\frac{1-r^n}{1-r}p''. \tag{29}$$

Ținând seama de relația (28), se disting următoarele trei cazuri:

$p''-(1-r)p>0$ probabilitățile a priori cresc cu n.
$p''-(1-r)p<0$ „ „ „ descresc cu n.
$p''-(1-r)p=0$ „ „ „ rămân neschimbate.

Cazul al treilea este interesant. El ne dă exemplul unui șir de variabile dependente, care au totuși probabilități constante. Lanțul se numește, în acest caz, omogen.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul lui B_n, vom folosi relațiile găsite.
Se știe că, în condițiile problemei, avem

$$M(X_h - p_h)^2 = p_h q_h$$
$$M(X_h - p_h)\,M(X_k - p_k) = 2r^{k-h}\,p_h q_h\,;\ (h<k).$$

Din aceste două formule, rezultă imediat pentru B_n valoarea

$$B_n = (1+2r+2r^2+\cdots+2r^{n-1})\,p_1q_1 + \\ + (1+2r+2r^2+\cdots+2r^{n-2})p_2q_2+\cdots+p_nq_n.$$

Pentru simplificare, introducem notațiile

$$P=\frac{p''}{1-r}\,;\quad Q=\frac{q'}{1-r}\,;\quad P+Q=1. \tag{29'}$$

Rezultă, deci, din formulele (29) și (29'), pentru produsul p_mq_m, valoarea

$$p_mq_m = PQ+(P-Q)(P-p)\,r^m-(P-p)^2r^{2m},$$

iar pentru B_n

$$B_n=\sum_{m=1}^{n}(1+2r+2r^2+\cdots+2r^{n-m})[PQ+(P-Q)(P-p)r^m-(P-p)^2r^{2m}]. \tag{30}$$

Făcând însumarea din formula (30), se obține

$$B_n=\left(1+\frac{2r}{1-r}\right)nPQ+A+L_n, \tag{31}$$

unde A este o constantă, iar L_n o funcție de n, supusă condiției

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 0. \tag{32}$$

Din relația (27) se deduce

$$\sqrt{M(p-p_0)^2}=\frac{\sqrt{B_n}}{n\sqrt{s}}.$$

Ținând seama de (31), rezultă

$$\sqrt{M(p-p_0)^2}=\frac{1}{\sqrt{np}}\sqrt{\left(1+\frac{2r}{1-r}\right)PQ+\frac{A}{n^2}+\frac{L_n}{n^2}}.$$

Pentru n destul de mare, cantitățile $\frac{A}{n^2}$ și $\frac{L_n}{n^2}$ pot deveni în valoare absolută, în baza relației (32), mai mici decât orice număr

arbitrar de mic. Rezultă că ordinul de mărime al erorii comise înlocuind pe p cu p_0 este $\frac{1}{\sqrt{ns}}$, după cum am afirmat mai sus.

Urmând metoda generală, formăm acum expresiile

$$m'^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{t_i}{n} - p\right)^2.$$

Valoarea medie a probabilității constante fiind p, comparăm această expresie cu $m^2 = \frac{pq}{n}$.

Raportul $R^2 = \frac{m'^2}{m^2}$ este coeficientul de dispersiune.

p fiind necunoscut, îl înlocuim cu p_0, obținut din observații.

Raportul $R_0^2 = \frac{m_0'^2}{m^2}$ diferă foarte puțin de R^2.

In adevăr, se poate demonstra că eroarea care se comite înlocuind pe R^2 cu R_0^2 este de ordinul de mărime $\frac{1}{s}$, deci foarte mică față de mărimea $\frac{1}{s}$ care dă ordinul de mărime al erorii probabile a coeficientului de dispersiune.

Avem

$$m_0^2 = \frac{p_0 q_0}{n}; \quad m_0'^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{t_i}{n} - p_0\right)^2.$$

Valoarea teoretică corespunzătoare expresiei empirice $m_0'^2$ este $\frac{B_0}{n^2}$. In mod evident, în acest caz

$$M(m_0'^2) = \frac{B_0}{n^2}. \tag{33}$$

Rămâne să calculăm expresia $M\left[m_0^2 - \frac{B_0}{n^2}\right]^2$, deoarece valoarea medie pătratică poate determina intervalul în care erorile se găsesc cu mare probabilitate. Pentru acest calcul folosim următoarea teoremă demonstrată mai înainte.

Valoarea medie empirică m_2' a pătratului unei variabile aleatorii X, dedusă dintr'un grup de observații, oscilează, la variația grupului, în jurul valorii medii teoretice m_2, iar valoarea medie a pătratului abaterii $(m_2' - m_2)$ este $\frac{1}{s}(m_4 - m_2^2)$, unde m_4 este valoarea medie a lui X^4.

In cazul considerat, variabila urmează legea normală a lui Laplace, după cum vom arăta mai departe; avem, deci, relaţiile

$$m_4 = 3m_2^2; \quad m_2 = B_n.$$

de unde rezultă

$$M\left(m_0'^2 - \frac{B_n}{n^2}\right)^2 = \frac{2B_n}{n^2 s},$$

sau

$$\sqrt{M\left(m_0'^2 - \frac{B_n}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2B_n}{s}}. \tag{34}$$

Formulele (33) şi (34) ne permit să afirmăm că raportul $\frac{m_0'^2}{B_n/n^2}$ este foarte apropiat de unitate.

In adevăr, din formula (33) obţinem

$$M\left(\frac{m_0'^2}{B_n/n^2}\right) = 1, \tag{35}$$

iar din (34) rezultă

$$\sqrt{M\left(\frac{m_0'^2}{B_n/n^2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{2}{s}}. \tag{36}$$

Când s este mare, putem înlocui raportul $\frac{m_0'^2}{B_n/n^2}$ cu 1. Eroarea pe care o vom face este cu siguranţă mai mică decât $3\sqrt{\frac{2}{s}}$. (Probabilitatea ca să avem o eroare mai mică decât $3\sqrt{\frac{2}{s}}$ este 0,997, adică siguranţa practică).

Punând pe R_0^2 sub forma

$$R_0^2 = \frac{m_0'^2}{B_n/n^2} \cdot \frac{B_n/n^2}{m_0^2}$$

rămâne ca pentru evaluarea lui R_0^2 să găsim valoarea raportului

$$\frac{B_n/n^2}{m_0^2}.$$

Conform formulei (31) avem:

$$B_n = \left(1 + \frac{2r}{2-r}\right) PQn + A + L_n,$$

unde A este o constantă, iar $\lim_{n\to\infty} L_n = 0$.

Deasemenea, am găsit

$$m_0^2 = \frac{p_0 q_0}{n} .$$

Prin urmare, raportul $\frac{B_n/n^2}{m_0^2}$ devine

$$\frac{B_n/n^2}{m_0^2} = \frac{1}{np_0q_0}\left[\left(1+\frac{2r}{2-r}\right)PQn+A+L_n\right] . \tag{37}$$

Inlocuim p_0q_0 cu pq. Eroarea pe care o comitem este de ordinul $\frac{1}{\sqrt{ns}}$, adică cu mult mai mică decât eroarea pe care o avem în vedere, care este de ordinul $\frac{1}{\sqrt{s}}$.

Insă:

$$p = \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}; \quad q = \frac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{n};$$

$$p_n = pr^n + \frac{1-r^n}{2-r}p''; \quad q_n = qr^n + \frac{1-r^n}{1-r}q';$$

$$P = \frac{p''}{1-r}; \qquad Q = \frac{q'}{1-r} .$$

Ţinând seama de aceste relaţii, după ce efectuăm toate calculele obţinem

$$npq = PQn + C + M_n , \tag{38}$$

unde C este o constantă, iar $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.

Din (37) şi (38), rezultă

$$R^2 = \frac{\left(1+\frac{2r}{1-r}\right)PQn+A+L_n}{PQn+C+M_n} , \tag{39}$$

deoarece

$$m_0'^2 \approx \frac{B_n}{n^2}$$

Pentru n mare, relaţia (39) se poate scrie

$$R^2 \approx 1+\frac{2r}{1-r} . \tag{40}$$

Coeficientul de dispersiune este dat, prin urmare, de relaţia simplă (40).

Scanned with OKEN Scanner

Formula (40) ne arată că avem de considerat următoarele trei cazuri:

$r > 0$ dispersiunea este supranormală;
$r < 0$ „ „ subnormală;
$r = 0$ „ „ normală.

Ultimul caz, $r=0$, era de prevăzut, deoarece, în acest caz, variabilele aleatorii devin independente, iar problema se reduce la exemplul clasic al lui Bernoulli, al urnei cu compoziție constantă.

Primele două cazuri sunt mai interesante.

Pentru $r > 0$, adică $p' > p''$, am obținut rezultatul că dispersiunea este supranormală; $p' > p''$ înseamnă, însă, că *probabilitatea de a se verifica evenimentul este mai mare în cazul în care pentru variabila precedentă evenimentul s'a verificat decât în cazul în care nu s'a verificat.*

Dacă $r < 0$, dispersiunea este subnormală. Se obține, prin urmare, acest fel de dispersiune când probabilitatea de *a se produce un eveniment este mai mică atunci când evenimentul s'a verificat în cazul precedent decât când nu s'a verificat.*

Se vede, prin urmare, că probabilitățile condiționate caracterizează dispersiunea fenomenului și anume, rezumând[1]):

Dacă $p' > p''$ dispersiunea este supranormală;
„ $p' < p''$ „ „ subnormală;
„ $p' = p''$ „ „ normală.

Este interesant de știut dacă succesiunea de frecvențe (20) este tipică.

Pentru aceasta, va trebui să dovedim că șirul (23) conduce prin însumarea lui la o lege limită a lui Laplace.

Să considerăm suma

$$X_{(n)} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\theta, \tag{41}$$

unde θ reprezintă o constantă pe care urmează să o determinăm.

Fie $P(n, \lambda)$ probabilitatea ca $X_{(n)}$ să ia valoarea λ în ipoteza că $p=p'$ și $P''(n, \lambda)$ aceeași probabilitate în ipoteza că $p=p''$.

Avem relațiile de recurență

$$\left.\begin{aligned} P(n, \lambda) &= p'P'(n-1,\ \lambda-1) + q'P''(n-1, \lambda); \\ P''(n, \lambda) &= p''P'(n-1,\ \lambda-1) + q''P''(n-1, \lambda-1). \end{aligned}\right| \tag{42}$$

---

[1]) *G. Mihoc*, Exemple de dispersiune în cazul variabilelor dependente. (Anuarul pentru Știința Asigurărilor, 1930).

Aceste formule se stabilesc descompunând pe $X_{(n)}$ în X_1 şi $X_2+X_3+\cdots+X_n$. Dacă $X_1=1$, ceeace se întâmplă cu probabilitatea p', înseamnă că trebue să avem

$$X_2+X_3+\cdots+X_n=\lambda-1,$$

eveniment a cărui probabilitate este $P'(n_1-1,\ \lambda-1)$.

Prin urmare, evenimentul

$$X_1=1;\ X_2+X_3+\cdots+X_n=\lambda-1$$

are loc cu probabilitatea $p'P'(n-1,\ \lambda-1)$.

La fel, evenimentul

$$X_1=0;\ X_2+X_3+\cdots+X_n=\lambda-1$$

are loc cu probabilitatea $q'P''(n-1,\ \lambda-1)$.

Cum aceste două evenimente sunt incompatibile, reuniunea lor are ca probabilitate suma probabilităţilor fiecăruia dintre ele.

Rezultă astfel prima dintre formulele (42). La fel se demonstrează şi a doua.

Să notăm acum cu $F'(n,\ t)$ funcţia caracteristică a variabilei (41) în ipoteza că $p=p'$ şi cu $F''(n,\ t)$ aceeaşi funcţie caracteristică dacă $p=p''$.

Avem, deci, prin definiţie

$$F'(n,\ t)=\sum_{\lambda=0}^{n}P'(n,\lambda)\,e^{(\lambda-n\theta)\,ti};$$

$$F''(n,\ t)=\sum_{\lambda=0}^{n}P''(n,\lambda)\,e^{(\lambda-n\theta)ti}.$$

Dacă ţinem seamă de relaţiile de recurenţă (42), relaţiile precedente ne dau

$$\left.\begin{aligned}F'(n,t)&=p'e^{(1-\theta)\,ti}\ F'(n-1;\ t)+q'e^{-\theta ti}\ F''(n-1,t);\\ F''(n,t)&=p''e^{(1-\theta)\,ti}\ F'(n-1,\ t)+q''e^{-\theta ti}\ F''(n-1,\ t).\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

Să introducem acum funcţiile

$$\left.\begin{aligned}\Phi'(\lambda,t)&=1+\lambda F'(1,t)+\lambda^2F'(2,t)+\cdots+\lambda^nF'(n,t)+\cdots\\ \Phi''(\lambda,t)&=1+\lambda F''(1,t)+\lambda^2F''(2,t)+\cdots+\lambda^nF''(n,t)+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

Ţinând seamă că

$$|F'(n,t)|\leq 1;\quad |F''(n,t)|\leq 1$$

deoarece $F'(n;t)$ și $F''(n;t)$ sunt funcții caracteristice, reiese că seriile din membrul al doilea al relațiilor (44) sunt convergente.

Inlocuind în (44) pe $F'(n, t)$ și $F''(n, t)$ cu valorile obținute din relațiile de recurență (43), rezultă

$$\left.\begin{aligned}\Phi'(\lambda, t) &= \lambda p' e^{(1-\theta)ti}\,\Phi'(\lambda, t) + \lambda q' e^{-\theta ti}\,\Phi''(\lambda, t) + 1\,;\\ \Phi''(\lambda, t) &= \lambda p'' e^{(1-\theta)ti}\,\Phi'(\lambda, t) + \lambda q'' e^{-\theta ti}\,\Phi''(\lambda, t) + 1.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Rezolvând acest sistem, obținem

$$\Phi'(\lambda;t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda q' e^{-\theta ti} \\ 1 & 1-\lambda q'' e^{-\theta ti}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda p' e^{(1-\theta)ti} & -\lambda q' e^{-\theta ti} \\ -\lambda p'' e^{(1-\theta)ti} & 1-\lambda q'' e^{-\theta ti}\end{vmatrix}}$$

$$\Phi''(\lambda;t) = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda p' e^{(1-\theta)ti} & 1 \\ \lambda p'' e^{(1-\theta)ti} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda p' e^{(1-\theta)ti} & -\lambda q' e^{-\theta ti} \\ \lambda p'' e^{(1-\theta)ti} & 1-\lambda q'' e^{-\theta ti}\end{vmatrix}} \tag{46}$$

$\Phi'(n, t)$ și $\Phi''(n, t)$ sunt respectiv coeficienții lui λ^n în desfășurarea în serie după puterile lui λ a fracțiilor din membrul al doilea al egalităților (46).

Trebue, deci, să ne ocupăm de rădăcinile ecuației

$$D(\lambda, t) = \begin{vmatrix} 1-\lambda p' e^{(1-\theta)ti} & -\lambda q' e^{-\theta ti} \\ -\lambda p'' e^{(1-\theta)ti} & 1-\lambda q'' e^{-\theta ti}\end{vmatrix}$$

Dacă λ_1 și λ_2 sunt rădăcinile acestei ecuații, se poate demonstra că

$$|\lambda_1| \geq 1 \qquad |\lambda_2| \geq 1.$$

In adevăr, λ_1 fiind o rădăcină a ecuației

$$D(\lambda, t) = 0,$$

putem găsi două valori z_1 și z_2, astfel încât

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 p' e^{(1-\theta)ti} z_1 + \lambda_1 q' e^{-\theta ti} z_2 &= z_1\,;\\ \lambda_1 p'' e^{(1-\theta)ti} z_1 + \lambda_1 q'' e^{-\theta ti} z_2 &= z_2.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Aplicând o cunoscută proprietate a modulului unei sume, rezultă :

$$\left.\begin{aligned} p'|\lambda_1||z_1| + q'|\lambda_1||z_2| &\geq |z_1|; \\ p''|\lambda_1||z_1| + q''|\lambda_1||z_2| &\geq |z_2|. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Să presupunem

$$|z_1| \geq |z_2|.$$

Împărțind prima egalitate cu (z_1), obținem

$$p'|\lambda_1| + q'|\lambda_1| \cdot \frac{|z_2|}{|z_1|} \geq 1.$$

Deoarece

$$\frac{|z_2|}{|z_1|} \leq 1,$$

rezultă, cu atât mai mult,

$$p'|\lambda_1| + q'|\lambda_1| \geq 1$$

sau

$$|\lambda_1| \geq 1.$$

Dacă

$$|z_2| \geq |z_1|,$$

a doua inegalitate din (48) duce la aceeași concluzie. Prin același procedeu putem vedea în ce împrejurări

$$|\lambda_1| = 1.$$

Din cele de mai sus rezultă că această egalitate nu este posibilă decât dacă

$$|z_1| = |z_2|.$$

Notăm atunci

$$\lambda_1 = e^{\varphi t i}; \qquad z_1 = \rho e^{\varphi_1 t i}; \qquad z_2 = \rho e^{\varphi_2 t i}.$$

Egalitățile (47) devin

$$p' e^{[\varphi + (1-\theta)t]i} + q' e^{[\varphi + \varphi_2 - \varphi_1 - \theta t]i} = 1;$$

$$p'' e^{[\varphi + \varphi_1 - \varphi_2 + (1-\theta)t]i} + q'' e^{[\varphi - \theta t]i} = 1.$$

Egalând părțile reale din egalitățile de mai sus, rezultă

$$\left.\begin{aligned} p' \cos[\varphi + (1-\theta)t] + q' \cos[\varphi + \varphi_2 - \varphi_1 - \theta t] &= 1; \\ p'' \cos[\varphi + \varphi_1 - \varphi_2 + (1-\theta)t] + q'' \cos[\varphi - \theta t] &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$p' \geq 0;\ q' \geq 0;\qquad p'+q'=1;$$
$$p'' \geq 0;\ q'' \geq 0;\qquad p''+q''=1,$$

se vede că

$$\left.\begin{aligned} &p' \neq 0; && \varphi+(1-\theta)t=2k_1\pi;\\ &q' \neq 0; && \varphi+\varphi_2-\varphi_1-\theta t=2k_2\pi;\\ &p'' \neq 0; && \varphi+\varphi_1-\varphi_2+(1-\theta)t=2k_3\pi;\\ &q'' \neq 0; && \varphi-\theta t=2k_4\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

unde k_1, k_2, k_3, k_4 sunt numere întregi, pozitive sau negative.

Este însă imposibil să avem îndeplinite toate aceste egalități. De exemplu, prima și ultima dintre ele ne dau prin scădere

$$t=2(k_1-k_4)\pi,$$

ceeace este imposibil. Prin urmare, nu putem avea în același timp

$$p'' \neq 0;\qquad q'' \neq 0;$$
$$p' \neq 0;\qquad q' \neq 0.$$

Să presupunem, deci, $p'=0$, ceeace înseamnă $q'=1$. Dacă $q'' \neq 0$, urmează și $p'' \neq 0$. Sunt, deci, îndeplinite ultimele trei dintre relațiile (50), care pot fi puse sub forma:

$$\varphi+\left(\frac{1}{2}-\theta\right)t=(k_2+k_3)\pi;$$

$$\varphi-\theta t=2k_4\pi.$$

Aceste relații ne conduc tot la o imposibilitate, deoarece prin scădere ne dau:

$$\frac{1}{2}t=(k_2+k_3-2k_4)\pi.$$

Deci una dintre probabilitățile p'' sau q'' trebue să fie egală cu zero.

Dacă $p''=0$, rezultă $p''=1$. Avem deci $q'=1$ și $q''=1$. Variabilele X_i dau numai bile negre.

Dacă $q''=0$, rezultă $q''=1$, deci $p''=1$ și $q'=1$. Avem tot o succesiune certă, variabilele X_i luând consecutiv valorile 1 și 0.

In sfârșit, dacă facem aceeași analiză pornind dela $q'=0$, obținem cazul în care succesiunea este formată numai din bile albe, adică variabilele X_i iau numai valoarea 1.

Rezumând, se vede că nu putem avea

$$|\lambda_1|=1$$

pentru orice valoare a lui t, decât atunci când variabilele X_i dau naștere la o succesiune certă, caz care desigur nu prezintă niciun interes.

Să considerăm acum una dintre funcțiile $\Phi'(\lambda; t)$ și $\Phi''(\lambda; t)$.

Dintr'o formulă elementară de descompunere în elemente simple, în baza relației (27), rezultă

$$\Phi'(\lambda; t)=\frac{A(t)}{\lambda_1-\lambda}+\frac{B(t)}{\lambda_2-\lambda},$$

unde λ_1 și λ_2 sunt rădăcinile ecuației $D(\lambda, t)=0$.

In continuare, obținem

$$\Phi'(\lambda; t)=\frac{A(t)}{\lambda_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_1}}+\frac{B(t)}{\lambda_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_2}}$$

sau

$$\Phi'(\lambda; t)=\frac{A(t)}{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\lambda_1^n}+\frac{B(t)}{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\lambda_2^n}, \tag{51}$$

desvoltările în serie fiind posibile, deoarece:

$$|\lambda|<1; |\lambda_1|>1; |\lambda_2|>1,$$

deci:

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda_1|}<1; \quad \frac{|\lambda|}{|\lambda_2|}<1.$$

Deoarece $F'(n; t)$ este coeficientul lui λ^n în desvoltarea lui $\Phi'(\lambda, t)$, din (51) rezultă

$$F'(n, t)=\frac{A(t)}{\lambda_1^{n+1}}+\frac{B(t)}{\lambda_2^{n+1}}. \tag{52}$$

In mod analog, obținem

$$F''(n, t)=\frac{C(t)}{\lambda_1^{n+1}}+\frac{D(t)}{\lambda_2^{n+1}}. \tag{53}$$

Să mai observăm că, dacă $t=0$, ecuația $D(\lambda; t)=0$ admite o rădăcină egală cu 1.

In adevăr, în acest caz, ecuația $D(\lambda; t)=0$ devine

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda p' & -q' \\ -p'' & 1-\lambda p'' \end{vmatrix}=0$$

care, ținând seama de faptul că

$$p'+q'=1; \quad p''+q''=1$$

are o rădăcină egală cu 1.

Mai mult decât atât, din (46) rezultă că, pentru $t=0$, avem

$$\Phi'(\lambda, 0)=\frac{1}{1-\lambda}; \quad \Phi''(\lambda, 0)=\frac{1}{1-\lambda}.$$

Reiese de aici că funcțiile $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ se bucură de proprietățile

$$\begin{aligned} A(0)&=1; \quad B(0)=0; \\ C(0)&=1; \quad D(0)=1, \end{aligned} \tag{54}$$

presupunând că $\lambda_1=\lambda_1(t)$ este rădăcina care, pentru $t=0$, devine 1, adică $\lambda(0)=1$.

Formulele (52) și (53) rezolvă problema.

Să notăm respectiv cu $\mu_1(t)$ și $\mu_2(t)$ inversele rădăcinilor ecuației $D(\lambda, t)=0$.

Rezultă că $\mu_1(t)$ și $\mu_2(t)$ sunt rădăcinile ecuației $D(\mu, t)=0$, unde

$$D(\mu, t)=\begin{vmatrix} \mu-p'e^{(1-\theta)ti} & -q'e^{-\theta ti} \\ -p''e^{(1-\theta)ti} & \mu-q''e^{-\theta ti} \end{vmatrix}.$$

Formulele (52) și (53) devin

$$\left.\begin{aligned} F'(n;t)&=A(t)\mu_1^{n+1}+B(t)\mu_2^{n+1}; \\ F''(n;t)&=C(t)\mu_1^{n+1}+D(t)\mu_2^{n+1}. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Pentru determinarea momentului de ordinul întâi al variabilei, trebue să derivăm funcțiile caracteristice și să facem $t=0$.

Dacă notăm acest moment cu $M_1'(n, \theta)$ și $M_1''(n, \theta)$, derivând relațiile (55) și făcând $t=0$, obținem

$$\left.\begin{aligned} M_1'(n, \theta)&=-n\mu_1'(0)i+\alpha'+\beta'\mu_2^n(0), \\ M_2'(n, \theta)&=-n\mu_1'(0)i+\alpha''+\beta''\mu_2^n(0), \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

unde $\mu_1'(0)$ reprezintă valoarea derivatei întâia a lui $\mu_1(t)$ în punctul $t=0$, iar $\alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ sunt constante în raport cu t și n; $\mu_1(0)$ este valoarea rădăcinei $\mu_2(0)$ în punctul 0, care, după cum se vede imediat, este mai mică în modul decât 1. In adevăr

$$\mu_2(0)=p'-p''$$

deci

$$|\mu_2(0)|=|p'-p''|<1.$$

Formulele (56) ne arată că momentele de ordinul întâi, sunt, din punct de vedere asimptotic, echivalente cu $-n\mu_1'(0)$.

Fie $\bar{\theta}$ valoarea lui θ pentru care se anulează $\mu_1'(0)$ și care se obține ușor derivând ecuația $D(\mu, t)=0$ și ținând seama că $\mu_1(0)=1$.

Corespunzător acestei valori a lui $\bar{\theta}$, rezultă

$$\left.\begin{aligned} F'(n,t) &= 1+\frac{M_1'(n,\bar{\theta})}{1!}it+\frac{M_2'(n,\bar{\theta})}{2!}i^2t^2+\cdots \\ F''(n,t) &= 1+\frac{M_1''(n,\bar{\theta})}{1!}it+\frac{M_2''(n,\bar{\theta})}{2!}i^2t^2+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

In mod analog, derivând de două ori ecuația $D(\mu,t)=0$, se obține:

$$\left.\begin{aligned} M_2'(n,\bar{\theta}) &\approx -n\mu_1''(0); \\ M_2''(n,\bar{\theta}) &\approx -n\mu_1''(0). \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Un calcul de verificare ne arată că $M_2'(n,\bar{\theta})$ și $M_2''(n,\bar{\theta})$ coincid cu valorile lui B_n, pentru $p=p'$ și $p=p''$, date de relația (31).

Să efectuăm substituțiile

$$t=\frac{\mu}{\sqrt{-\mu_1''(0)n}}\cdot$$

în relațiile (55) să facem pe n să tindă către infinit.

Obținem

$$\lim_{n\to\infty}F'\left[n,\frac{\mu}{\sqrt{-\mu_1''(0)n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\mu_1^{n+1}\left[\frac{\mu}{\sqrt{-\mu_1''(0)n}}\right];$$

$$\lim_{n\to\infty}F''\left[n,\frac{\mu}{\sqrt{-\mu_1''(0)n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\mu_1^{n+1}\left[\frac{\mu}{\sqrt{-\mu_1''(0)n}}\right].$$

$\mu_1(t)$ se desfășoară în serie pentru valorile lui t mai mici decât 1 și putem scrie

$$\mu_1(\mu)=1-\frac{\mu^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

notând cu $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ o funcție de μ care tinde către zero, când n tind către infinit, fiind de ordinul lui $\frac{1}{n^{3/2}}$.

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\mu_1^n(\mu)=e^{-\frac{\mu^2}{2}}.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}F'\left[n,\frac{\mu}{\sqrt{-\mu_1''(0)n}}\right]=e^{-\frac{\mu^2}{2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}F''\left[n,\frac{\mu}{\sqrt{-\mu_1''(0)n}}\right]=e^{-\frac{\mu^2}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţiile caracteristice tinzând în mod uniform către funcţia caracteristică a legii normale a lui Laplace, rezultă că şi funcţiile de repartiţie corespunzătoare tind către funcţiile de repartiţie ale aceleiaşi legi.

Teorema este deci demonstrată.

5. Cazuri mai generale

Concluziile de mai sus referitoare la tinderea la limită către legea normală se păstrează şi în cazuri mai generale [1]).

Astfel, dacă avem m funcţii caracteristice

$$F_1(n,t),\ F_2(n,t),\ldots,F_m(n,t),\ldots$$

care satisfac relaţiile de recurenţă:

$$F_k(n,t)=\sum_{j=1}^{m} p_{kj}e^{(a_1-\theta)it}\,F_j(n-1,t),$$

$$(k=1,2\ldots m)$$

unde

$$p_{kj}\geq 0;\ \sum_{j=1}^{m} p_{kj}=1,$$

iar $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt nişte constante date şi θ o constantă convenabil aleasă, se arată în mod analog că aceste funcţii tind către funcţia caracteristică corespunzătoare legii lui Laplace, cu condiţia ca ecuaţia

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} & \ldots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} & \ldots & p_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & & p_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

să admită pe $\lambda=1$ ca rădăcină simplă.

Desigur că este interesant de examinat şi cazul în care ecuaţia de mai sus admite pe $\lambda=1$ ca rădăcină multiplă, dar de acest caz nu ne ocupăm aici.

---

[1]) *O. Onicescu* şi *G. Mihoc*, Lanţuri de variabile aleatorii. Probleme asimptotice (Academia Română. Studii şi Cercetări, Nr. XIV, 1942).

Scanned with OKEN Scanner

Observații. In teoria dispersiunii, considerarea unor scheme nu interesează decât în cazul în care rezultatele găsite cu ajutorul lor pot servi la studiul unor categorii de fenomene statistice.

Astfel, teoria dispersiunii ne permite, atunci când știm că variabilele care dau naștere frecvențelor sunt independente, să tragem concluzia dacă fenomenul considerat poate fi asimilat cu urna lui Bernoulli, cu urna lui Poisson sau a lui Lexis.

Teoria pe care am desvoltat-o mai sus se aplică la variabilele dependente, formând un lanț Markov simplu, adică pentru o categorie întinsă de fenomene naturale.

Ea ne arată că pentru fenomenele de această natură, coeficientul de dispersiune nu poate fi niciodată egal cu 1. In condițiile pe care le-am arătat, dispersiunea este supranormală sau subnormală. Coeficientul de dispersiune ne dă deci o indicație și asupra dependenței sau independenței probelor.

Dacă trecem însă la o dependență și mai generală, putem ajunge la o dispersiune normală și la o succesiune tipică a frecvențelor, fără să mai poată fi vorba de o comparare cu urna lui Bernoulli[1]).

Să considerăm patru urne

$$U_{11}, \; U_{12}, \; U_{21}, \; U_{22}, \tag{59}$$

care conțin bile albe și negre în proporții cunoscute.

Fie respectiv

$$p_{111}, \; p_{121}, \; p_{211}, \; p_{221},$$

probabilitățile de a scoate o bilă albă din urnele de mai sus, și

$$q_{111}, \; q_{121}, \; q_{211}, \; q_{221},$$

probabilitățile lor contrare. Avem

$$p_{111}+q_{111}=1 \; ; \; p_{121}+q_{121}=1 \; ; \; p_{211}+q_{211}=1 \; ; \; p_{221}+q_{221}=1.$$

Din sistemul de urne (59) efectuăm extracții succesive după următoarea regulă: dacă în extracțiile de rangul n și $n+1$ au ieșit bile albe, extracția de rangul $n+2$ o facem din urna U_{11}; dacă în extracția de rangul n a ieșit o bilă albă și în extracția de rangul $n+1$ o bilă neagră, extracția de rangul $n+2$ va fi efectuată din U_{12}; dacă în extracția de rangul n a ieșit o bilă neagră și în extracția

---

[1]) *O. Onicescu* și *G. Mihoc*, Coeficientul de dispersiune și dependența probelor. Buletinul de Matematică al Societății Române de Științe, Tomul 46, 1944.

de rangul $n+1$ o bilă albă, extracția de rangul $n+2$ va fi efectuată din U_{21}; dacă, în sfârșit, extracțiile de rangul n și $n+1$ au dat bile negre, extracția de rangul $n+2$ o facem din urna U_{22}.

Pentru a obține un coeficient de dispersiune egal cu 1, se demonstrează că trebue să avem

$$(p_{112}+p_{211})^2=\frac{p_{211}(p_{221}+p_{122})^2}{(p_{221}+p_{122})^2-p_{122}}.$$

Există o infinitate de sisteme de urne (59) pentru care relația de mai sus este verificată.

Astfel, putem lua

$$p_{112}=k-\frac{k^2}{m};$$

$$p_{221}=h=\frac{(m+1)h^2}{m};$$

$$p_{122}=\frac{(m-1)h^2}{m},\quad p_{211}=\frac{k^2}{m},$$

parametrii h, k, m fiind pozitivi și trebuind să satisfacă inegalitățile

$$h\leq\frac{m}{2(m-1)}\left(1-\sqrt{\frac{4-5m}{4}}\right);\quad k\leq m,\ \text{pentru}\ 1\leq m<\frac{4}{3};$$

$$h<\sqrt{\frac{m}{m-1}};\qquad k=\sqrt{m},\ \text{pentru}\ \frac{4}{3}\leq m\leq 4;$$

$$h\leq\sqrt{\frac{m}{m-1}};\qquad k\leq\frac{m}{2}\left(1-\sqrt{\frac{m-1}{m}}\right),\ \text{pentru}\ 4<m.$$

Dacă luăm pentru h, k, m un sistem de valori raționale care verifică condițiile precedente, putem construi efectiv scheme de urne pentru care frecvențele obținute dau naștere la o dispersiune normală.

Astfel, pentru

$$m=1;\quad h=\frac{3}{4};\quad k=\frac{3}{8}$$

obținem:

$$p_{112}=\frac{11}{16};\quad p_{221}=\frac{1}{4};\quad p_{122}=\frac{1}{2};\quad p_{221}=\frac{1}{16}.$$

adică un sistem simplu de urne (59) cu probabilitățile de mai sus, care dă naștere la un șir de extracții dependente, cu dispersiune

Scanned with OKEN Scanner

normală și succesiune tipică. Comparația cu urna lui Bernoulli, evident, nu mai este posibilă. Dar, deoarece în general este destul de greu să se stabilească independența probelor succesive, apare necesitatea ca, înafară de aceste criterii, să se mai recurgă la altele, pentru a se putea trage concluzii asupra schemei care corespunde cel mai bine fenomenului considerat.

Un asemenea criteriu este dat de comportarea iterațiilor, de care ne vom ocupa în capitolul următor.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XIII

ITERAȚII

1. Considerații generale. Definiții

Să considerăm un șir de variabile aleatorii.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

susceptibile de a lua valorile $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Se numește iterație în șirul de valori obținut prin supunerea variabilelor x_n la o serie de probe, orice succesiune de valori a_i formată numai din aceleași valori.

De exemplu, în succesiunea

$$a_1 a_2 a_2 a_3 a_2 a_1 a_1 a_1 a_3$$

avem iterația $a_2 a_2$ de lungime 2 și iterția $a_1 a_1 a_1$ de lungime 3, înțelegând prin lungime numărul care ne indică de câte ori valoarea a_i se repetă în iterația respectivă.

Prin analogie, se numește iterație de lungime 1 prezența unei singure valori a_i între două valori diferite a_n și a_k

$$a_1, (a_2 a_2), a_3, a_2 (a_1 a_1 a_1), a_2.$$

Este evident că numărul iterațiilor variază dela probă la probă și, prin urmare, este o variabilă aleatorie, care pentru fiecare șir x_n se supune unei legi de probabilitate.

Frecvența iterațiilor poate, deci, să ne dea indicații prețioase asupra legii de probabilitate a șirului x_n.

Statisticianul K. Marbe a considerat 200 000 nașteri, examinând iterațiile nașterilor masculine pentru a trage concluzii asupra coeficientului de masculinitate. Observațiile lui au fost confruntate cu elementele teoretice corespunzătoare din teoria dispersiunii și au confirmat ipoteza admiterii unei probabilități constante la repartiția nașterilor pe sexe.

2. Problema iteraţiilor pentru un caz particular de lanţ Markov

Vom examina problema iteraţiilor pentru schema expusă în capitolul VII, care cuprinde schema lui Bernoulli ca un caz particular.

Să considerăm deci trei urne U, U', U'', în care se găsesc bile albe şi negre într'o proporţie dată. Notăm cu p, p', p'' probabilităţile respective de a scoate o bilă albă din aceste urne, iar cu q, q', q'', probabilităţile lor contrare

$$(p+q=1\,;\quad p'+q'=1\,;\quad p''+q''=1).$$

Prima extracţie o efectuăm din urna U. Dacă bila extrasă a fost albă, extracţia următoare o efectuăm din urna U'; dacă bila a fost neagră, extracţia următoare o efectuăm din urna U''. Procedeul se continuă în acelaşi mod, punând după fiecare extracţie bila înapoi în urna din care a fost extrasă.

Vom efectua după acest procedeu n extracţii succesive, obţinând succesiuni de bile albe şi negre. Ne interesează legea de probabilitate a iteraţiilor pe care le vom găsi.

Să notăm cu $P'(\lambda, n)$ probabilitatea de a obţine iteraţii din n extracţii consecutive, în ipoteza că în prima extracţie a ieşit o bilă albă, şi cu $P''(\lambda, n)$ aceeaşi probabilitate în ipoteza că în prima extracţie a ieşit o bilă neagră.

Avem relaţiile de recurenţă

$$P'(\lambda, n)=p'P'(\lambda, n-1)+q'P''(\lambda-1, n-1)\,;$$
$$P''(\lambda, n)=p''P'(\lambda-1, n-1)+q''P''(\lambda, n-1).$$

Să notăm cu $F'(n,t)$ şi $F''(n,t)$ funcţiile caracteristice definite prin relaţiile

$$F'(n,\ t)=\sum_{1}^{n}{}_{\lambda} e^{(\lambda-n\theta)ti}P''(\lambda, n),$$

$$F''(n,\ t)=\sum_{1}^{n}{}_{\lambda} e^{(\lambda-n\theta)ti}P''(\lambda, n),$$

unde θ este o constantă.

Rezultă relaţiile de recurenţă

$$\left.\begin{aligned} F'(n,t)&=p'e^{-\theta ti}F'(n-1,t)+q'e^{(1-\theta)ti}F''(n-1,\ t),\\ F''(n,t)&=p''e^{(1-\theta)ti}F'(n-1,\ t)+q''e^{-\theta ti}F''(n-1,\ t),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Urmând acum pas cu pas, fără nicio deosebire, calculele pe care le-am făcut în capitolul XII pag. 174—182 pentru a demonstra că numărul de bile albe urmează la limită legea normală a lui Laplace, se arată că pentru

$$\theta = \frac{2p''q''}{p''+q''},$$

funcțiile caracteristice mai sus considerate tind către funcțiile caracteristice ale legii normale a lui Laplace.

Putem trage deci concluzia că numărul de iterații obținut urmează la limită legea normală a lui Laplace.

Avem, în plus, următoarele valori asimptotice [1]) pentru numărul de iterații obținut în n extracții, pe care îl notăm cu M_n și pentru valoarea medie pătratică a aceluiași număr, pe care o notăm cu μ_n^2:

$$M_n \approx \frac{2p''q'}{p''+q'}\, n \tag{2}$$

$$\mu_n^2 \approx \frac{4p''q'}{(p''+q')^2}\,[(p''+q')^2 - p''q'(p''+q') - 2p''q']\, n. \tag{3}$$

In baza acestor relații, dacă notăm cu Q^2 coeficientul de dispersiune format pentru iterațiile obținute în n probe consecutive, obținem

$$Q^2 = 2\,\frac{(p''+q')^2 - p''q'(p''+q') - 2p''q'}{(p''+q')(p''+q'-2p''q')}. \tag{4}$$

Se vede ușor că $Q^2 \geq 1$, egalitatea având loc numai în cazul $p''=q'$.

Prin urmare, pentru schema de urne considerată, se obține totdeauna o dispersiune supranormală, cu excepția cazului mai sus menționat.

3. Cazul urnei lui Bernoulli

Ne interesează în special cazul urnei lui Bernoulli, adică acel caz în care admitem existența unei probabilități constante p într'o serie de probe independente.

In acest caz

$$\left.\begin{aligned} p' &= p'' = p, \\ q' &= q'' = q. \end{aligned}\right| \tag{5}$$

[1]) *G. Mihoc.* Asupra problemei iteraților într'un șir de probe. (Buletinul de Matematică al Societății Române de Știință, Tom 45, 1943).

Scanned with OKEN Scanner

Schema lui Bernoulli intră deci ca un caz particular în schema considerată mai sus.

Propoziţiile demonstrate pentru această schemă sunt, prin urmare, adevărate şi pentru urna lui Bernoulli.

Putem deci enunţa următoarea teoremă: numărul de iteraţii pentru urna lui Bernoulli urmează la limită legea normală de probabilitate a lui Laplace.

Aceasta înseamnă pentru aplicaţiile practice că, dacă vom efectua un şir de experienţe corespunzătoare schemei lui Bernoulli, frecvenţele iteraţiilor vor de naştere la o succesiune tipică.

Relaţiile (2), (3), (4), ţinând seamă de (5), devin:

$$M_n \approx 2pqn;$$

$$\mu_n^2 \approx 4pq\,(1-3\,pq)\,n;$$

$$Q^2 = \frac{2\,(1-3pq)}{1-2pq}. \qquad (6)$$

Însă, deoarece

$$pq \leq \frac{1}{4},$$

rezultă că avem totdeauna

$$Q^2 \geq 1,$$

egalitatea având loc numai pentru $p = q = \frac{1}{2}$.

Coeficientul de dispersiune pentru numărul de iteraţii este deci totdeauna mai mare decât 1.

Putem acum să complectăm teoria dispersiunii, şi anume, *dacă pentru un şir de frecvenţe se obţine o dispersiune normală, asimilarea cu urna lui Bernoulli este permisă numai în cazul în care numărul de iteraţii dă naştere la o dispersiune supranormală sau excepţional normală.*

4. Diferite probleme

Să examinăm diferitele probleme ce se pot pune, tot în cazul urnei lui Bernoulli, pentru iteraţiile de lungime dată.

Prima problemă pe care ne-o punem este să determinăm valoarea medie a numărului de iteraţii de lungime m în n extracţii succesive.

Să notăm cu $M_m(n)$ momentul de ordinul întâi al numărului de iteraţii dă lungime m obţinute în n probe consecutive; cu $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

Scanned with OKEN Scanner

probabilitatea ca în primele n probe să se obțină respectiv valorile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_i = 1; 0)$ și cu $\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ numărul de iterații de lungime m cuprinse în șirul $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Prin definiție, avem

$$M_m(n) = \sum P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

semnul Σ cuprinzând toate combinațiile posibile care se pot face cu valorile $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_i = 1; 0)$.

Însă

$$\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \lambda(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

cu excepțiile

$$\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) = \lambda\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) + 1,$$

$$\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) = \lambda\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) + 1,$$

$$\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) = \lambda\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) + 1,$$

$$\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m+1}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) = \lambda\left(\frac{00\ldots0}{m+0}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) + 1.$$

Putem deci scrie

$$\begin{aligned}
M_m(n) = {} & \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) + \\
& + \sum P_i\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) + \\
& + \sum P\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) + \\
& + \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) + \sum{}' P\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) - \\
& - \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) - \sum P\left(\frac{00\ldots0}{m+1}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) + \\
& + \sum{}' P(\alpha_1 - \alpha_n)\,\lambda(\alpha_2\,\alpha_n).
\end{aligned}$$

în ultima sumă, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ putând avea valorile 1 și 0, cu excepția combinațiilor

$$\frac{11\ldots1}{m}\,0\;;\quad \frac{11\ldots1}{m-1}\,0\;;\quad \frac{00\ldots0}{m}\,1\;;\quad \frac{00\ldots0}{m-1}\,1\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Probele considerate fiind independente, avem

$$M_m(n-1)=\sum P\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)+$$
$$+\sum P\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)+$$
$$+\sum P\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)+$$
$$+\sum P\left(\frac{00\ldots0}{m+1}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)+$$
$$+\sum P(\alpha_1\ldots\alpha_n)\lambda(\alpha_2\ldots\alpha_n).$$

Pe de altă parte

$$\sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)=p^m q,$$
$$\sum P\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)=p^{m+1}q,$$
$$\sum P\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)=pq^m,$$
$$\sum P\left(\frac{00\ldots0}{m+1}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)=pq^{m+1}.$$

Rezultă

$$M_m(n)=M_m(n-1)+p^m q^2+p^2q^m\,;\qquad (n>m).\tag{6}$$

Această formulă de recurență ne dă pentru $M_m(n)$ valoarea

$$M_m(n)=(p^m q^2+p^2q^m)n+2p^m q+2pq^m-(m+1)(p^m q^2+p^2q^m).\tag{7}$$

Am notat cu M_n valoarea medie a numărului de iterații. Insă, în baza teoremei pe care am demonstrat-o, valoarea medie a unei sume de variabile este egală cu suma valorilor medii ale acestor variabile, deci

$$M_n=M_1(n)+M_2(n)+\cdots$$

Ținând seama de (7), obținem pe altă cale, pentru M_n valoarea asimptotică $2pqn$.

5. Calculul momentului de ordinul al doilea

Putem calcula, cu același procedeu, momentul de ordinul al doilea. Prin definiție, avem

$$M_m^{(2)}(n)=\sum P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\lambda^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).\tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, ținând seama de (1), (2), (3), (4), (5), relația (8) devine:

$$M_m^{(2)}(n)=\sum P\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m}\right)\left[\lambda\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)+1\right]^2+$$

$$+\sum P\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m+1}\right)\left[\lambda\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)-1\right]^2+$$

$$+\sum P\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m}\right)\left[\lambda\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)+1\right]^2+$$

$$+\sum P\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m+1}\right)\left[\lambda\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)-1\right]^2+$$

$$+\sum P(\alpha_1\ldots\alpha_n)\lambda^2(\alpha_1\ldots\alpha_n). \qquad (9)$$

Insă

$$M_m^{(2)}(n-1)=\sum P\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda^2\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)+$$

$$+\sum P\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)\lambda^2\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)+$$

$$+\sum P\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0\ 0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)+$$

$$+\sum P\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m+1}\right)\lambda^2\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)+$$

$$+\sum P(\alpha_1\ldots\alpha_n)\lambda^2(\alpha_1\ldots\alpha_n). \qquad (10)$$

$$\sum P\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)=$$

$$=p\sum P\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right). \qquad (11)$$

$$\sum P\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m+1}\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)=$$

$$d=\sum P\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1\ 0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right). \qquad (12)$$

$$\sum P\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)=$$

$$=q\sum P\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m+1}\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0\ 1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m-2}\right). \qquad (13)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum P\left(\frac{00\ldots0\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)=$$

$$=q\sum P\left(\frac{00\ldots0\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right) \tag{14}$$

$$\sum P\left(\frac{11\ldots1\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)=$$

$$=\sum Pp^{m-1}qM_m(n-m-1)+p^{m+1}q^m. \tag{15}$$

$$\sum P\left(\frac{11\ldots1\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda\left(\frac{11\ldots1\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)=$$

$$=p^mqM_m(n-m-1)+p^mq+p^{m+2}q^m. \tag{16}$$

$$\sum P\left(\frac{00\ldots0\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n}{m-1}\right)=$$

$$=pq^{m-1}M_m(n-m-1)+p^mq^{m+1}. \tag{17}$$

$$\sum P\left(\frac{00\ldots0\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n}{m}\right)=$$

$$=pq^mM_m(n-m-1)+pq^m+p^mq^{m+2}. \tag{18}$$

Ţinând seama de (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), relaţia (9) devine:

$$M_m^{(2)}(n)=M_m^{(2)}(n-1)+2p^mqM_m(n-m-1)-2p^{m+1}qM_m(n-m-2)+$$
$$+2pq^mM_m(n-m-1)-2pq^{m+1}M_m(n-m-2)+2p^{m+1}q^{m+2}+$$
$$+p^mq^2+p^2q^m. \tag{19}$$

Am vrut să punem în evidenţă această formulă, deoarece relaţiile dintre momentele succesive constitue principiul metodei pe care o urmăm.

Relaţia de recurenţă (19) ne permite să găsim valoarea lui $M_m^2(n)$ în funcţie de n.

Obţinem, astfel

$$M_m^{(2)}(n)=T^2n^2+(6UT-4mT^2+2p^{m+1}q^{m+1}-T^2+T)n+H, \tag{20}$$

unde

$T=p^mq^2+p^2q^m$, iar U şi H sunt funcţii de p uşor de determinat.

Dacă notăm cu $\sigma_m^{(2)}(n)$ abaterea medie pătratică, rezultă din (20) și din (7):

$$\sigma_m^{(2)}(n)=2UT-2mT^2+2p^{m+1}q^{m+1}-3T^2+T)n+k, \tag{21}$$

unde k este o constantă.

Se verifică ușor că:

$$2UT-2mT^2+2p^{m+1}q^{m+1}-3T^2+T\geqq 0,$$

egalitatea având loc pentru $p=1$ și $p=0$.

Deasemenea, pentru $m=2$, obținem

$$2UT-2mT^2+2p^{m+1}q^{m+1}-3T^2+T\geqq T-T^2. \tag{22}$$

In acest caz, inegalitatea precedentă devine

$$6p^3q^3(1-4pq)\geqq 0.$$

Pentru $m=1$, obținem

$$\sigma_m^{(2)}(n)=(pq+p^2q^2)n+k,$$

$$M_1(n)=pqn+2pq$$

și ca urmare

$$\frac{pq+p^2q^2}{pq(1-pq)}\geqq 1.$$

Pentru $m=3$, inegalitatea (22) încetează de a fi adevărată pentru toate valorile lui p, fiind verificată numai pentru

$$p\leqq\frac{5-\sqrt{5}}{10};\quad p\geqq\frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

Putem, deci, spune în concluzie că *iteratiile de lungime 1 și 2 dau naștere totdeauna unei dispresiuni supranormale și numai în cazuri excepționale, unei dispresiuni normale* $\left(p=0 \text{ și } p=1 \text{ pentru } m=1 \text{ și } m=2, \text{ și } p=\frac{1}{2} \text{ pentru } m=2\right)$. Pentru $m>2$, această concluzie nu mai este valabilă. Cu toate acestea, numărul total de iterații duce totdeauna la o dispersiune supranormală, după cum am văzut. Aceasta constitue încă o complectare importantă la teoria dispersiunii.

6. Legea limită redusă

Ne propunem să determinăm acum legea limită redusă a numărului de iterații de lungime m.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta, considerăm funcţia caracteristică

$$F(a_1, \ldots, a_m, \alpha_{m+1}; \quad n; \quad t; \quad \theta) =$$
$$= \sum P(\alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n)\, e^{[\lambda(a_1 \ldots a_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n)-(n-m-\theta)]ti} \qquad (23)$$

unde θ este o constantă, a_i şi α_i reprezintă valorile 1 şi 0, iar semnul de sumare se referă la toate combinaţiile care pot fi formate cu valorile $\alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$.

$F(a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}; n; t; \theta)$ reprezintă, deci, funcţia caracteristică a numărului de iteraţii de lungime m, obţinute în $n-m-1$ probe consecutive, după ce în primele $m+1$ probe s'au obţinut respectiv valorile $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$.

Ţinând seama de relaţiile (1), (2), (3), (4), (5), rezultă

$$\left.\begin{aligned}
&F(a_1, \ldots, a_{m+1}; \quad n; \quad t) = pe^{-\theta it} F(a_2, \ldots, a_{m+1} 1; \quad n-1; \quad t) + \\
&\qquad + qe^{-it} F(a_2, \ldots, a_{m+1}, 0; \quad n-1; \quad t). \\
&F\left(\frac{11\ldots1\,1}{m}; \quad n; \quad t\right) = pe^{(1-\theta)it} F\left(\frac{11\ldots1}{m+1}; \quad n-1; \quad t\right) + \\
&\qquad + qe^{(1-\theta)it} F\left(\frac{11\ldots1\,0}{m-1}; \quad n-1; \quad t\right). \\
&F\left(\frac{00\ldots0\,1}{m}; \quad n; \quad t\right) = pe^{(1-\theta)ti} F\left(\frac{00\ldots0\,11}{m-1}; \quad n-1; \quad t\right) + \\
&\qquad + qe^{(1-\theta)it} F\left(\frac{00\ldots0\,10}{m-1}; \quad n-1; \quad t\right). \\
&F\left(\frac{11\ldots1}{m+1}; \quad n; \quad t\right) = pe^{-\theta ti} F\left(\frac{11\ldots1}{m+1}; \quad n-1; \quad t\right) + \\
&\qquad + qe^{-(1+\theta)it} F\left(\frac{11\ldots1\,0}{m}; \quad n-1; \quad t\right). \\
&F\left(\frac{00\ldots0}{m+1}; \quad n; \quad t\right) = pe^{-(1+\theta)ti} F\left(\frac{00\ldots0\,1}{m}; \quad n-1; \quad t\right) + \\
&\qquad + qe^{-\theta it} F\left(\frac{00\ldots0}{m+1}; \quad n-1; \quad t\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

în prima dintre aceste relaţii $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ putând lua în toate felurile posibile valorile 1 şi 0, exceptând combinaţiile

$$\left(\frac{11\ldots1\,0}{m}\right), \quad \left(\frac{00\ldots0\,1}{m}\right), \quad \left(\frac{11\ldots1\,1}{m}\right), \quad \left(\frac{00\ldots00}{m}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm sistemul liniar:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda Z a_1, a_2, \ldots, a_{m+1} = pe^{-\theta it} Z a_2, \ldots, a_{m-1} 1 + qe^{-\theta it} Z a_2, \ldots, a_{m+1} 0 \\
&\lambda Z_{\underbrace{11\ldots1}_{m}\,0} = pe^{(1-\theta)it} Z_{\underbrace{11\ldots1}_{m-1}\,0} + qe^{(1-\theta)it} Z_{\underbrace{11\ldots1}_{m-0}\,0} \\
&\lambda Z_{\underbrace{00\ldots0}_{m}\,1} = pe^{(1-\theta)it} Z_{\underbrace{00\ldots0}_{m-1}\,1} + qe^{(1-\theta)it} Z_{\underbrace{00\ldots0}_{m-1}\,0} \\
&\lambda Z_{\underbrace{11\ldots1}_{m+1}\,1} = pe^{-\theta it} Z_{\underbrace{11\ldots1}_{m+1}\,1} + qe^{-(1+\theta)it} Z_{\underbrace{11\ldots1}_{m-1}\,0} \\
&\lambda Z_{\underbrace{00\ldots0}_{m+1}\,0} = pe^{-(1+\theta)it} Z_{\underbrace{00\ldots0}_{m}\,1} + qe^{-\theta it} Z_{\underbrace{00\ldots0}_{m+1}\,0}
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

și să notăm cu $D(\lambda, t, \theta)$ determinantul principal al acestui sistem. Pentru a stabili structura asimptotică a funcțiilor caracteristice definite prin relațiile liniare (24), este suficient să facem anumite considerații simple asupra naturii rădăcinilor ecuației $D(\lambda, t, \theta)=0$ [1]).

Astfel, făcând $\lambda=0$ și $t=0$, sistemul (25) se descompune în 2^m sisteme separabile de forma

$$pZa_1 a_2, \ldots, a_{m+1} 1 + qZa_1 a_2, \ldots, a_{m+1} 0 = 0,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ iau valorile 1 și 0 în toate cazurile posibile.

Ecuația $D(\lambda, 0, \theta)=0$ admite deci $\lambda=0$ ca rădăcină multiplă de ordinul 2^m+1.

Pe de altă parte, se constată că $\lambda=1$ este deasemenea o rădăcină a lui $D(\lambda, 0, \theta)=0$. Urmează deci că $D(\lambda, 0, \theta)=0$, admite rădăcina simplă $\lambda=1$ și rădăcina $\lambda=0$ multiplă de ordinul 2^m+1.

Să notăm cu $\lambda_1(t, \theta)$ rădăcina ecuației $D(\lambda, t, \theta)=0$, care pentru $t=0$ devine egală cu 1. Rezultă că, dacă notăm cu $M(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}; n)$ momentul de ordinul întâi corespunzând funcției caracteristice $F(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}; n; t)$ avem, pentru valorile mari ale lui n

$$M(a_1, \ldots, a_{m+1}; n; \theta) \approx -[\lambda_1 (t; \theta)]^n \qquad \theta > 0.$$

In același fel se poate stabili formula analoagă lui (6)

$$M(a_1, \ldots, a_{m+1}; n; \theta) \approx (p^m q^2 + p^2 q^m) n. \quad (26)$$

Pentru $\theta = \bar{\theta} = p^m q^2 + p^2 q^m$, avem $\lambda_1'(0, \bar{\theta})=0$, $\lambda=1$ fiind o rădăcină simplă a ecuației

$$D(\lambda, 0, \theta)=0$$

$$\sigma^{(2)}(a_1, \ldots, a_{m+1}; n; \bar{\theta}) \approx \lambda_1''(0, \bar{\theta})\, n,$$

---

[1]) *O. Onicescu* și *G. Mihoc*: Lanțuri de variabile aleatorii. Probleme asimptotice. (Academia Română. Studii și Cercetări Nr. XIV, 942).

Scanned with OKEN Scanner

notând cu $\sigma^{(2)}(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}; n; \theta)$ abaterea medie pătratică a numărului de iteraţii de lungime m, după ce în primele $(m+1)$ probe s'au obţinut valorile cunoscute $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$.

Avem, deasemenea, formula analoagă lui (21)

$$\sigma^{(2)}(a_1, \ldots, a_{m+1}; n; \bar{\theta}) \approx (2UT - 2mT^2 + 2p^{m+1}q^{m+1} - 3T^2 + T)n.$$

Deci:

$$\lambda_1''(0, \theta) = 2UT - 2mT^2 + 2p^{m+1}q^{m+1} - 3T^2 + T > 0$$

exceptând valorile $p=0$ şi $p=1$.

Condiţiile mai sus semnalate pentru existenţa legii limită redusă a lui Laplace sunt, prin urmare, îndeplinite. Putem deci enunţa proprietatea că legea limită redusă pentru numărul de iteraţii de lungime m este legea normală a lui Laplace.

7. Legea limită în condiţii suplimentare

Ne propunem să determinăm legea limită în cazul în care m şi n cresc necontenit satisfăcând relaţia

$$n(p^m q^2 + q^m p^2) = a,$$

unde a este o constantă.

Notând cu $M_m^{(k)}(n)$ momentul de ordinul k referitor la n probe şi folosind notaţiile de mai sus, obţinem

$$M_m^{(k)}(n) = \sum P(\alpha_1 \ldots, \alpha_n)\lambda^k(\alpha_1, \ldots \alpha_n).$$

Ţinând seama de relaţiile (1), (2), (3), (4), (5), rezultă:

$$\begin{aligned} M_m^{(k)}(n) = {} & \sum P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\lambda^k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \\ & + \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\left[\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)+1\right]^k + \\ & + \sum P\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\left[\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)+1\right]^k + \\ & + \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)\left[\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)+1\right]^k + \\ & + \sum P\left(\frac{00\ldots0}{m+1}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)\left[\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)+1\right]^k = \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= M_m^{(k)}(n-1) - \sum C_k^s \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-1}\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) +$$
$$+ \sum C_k^s \sum P\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-1}\left(\frac{00\ldots01}{m-1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) +$$
$$+ \sum C_k^s \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-1}\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) +$$
$$+ \sum C_k^s \sum P\left(\frac{00\ldots0}{m+1}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-1}\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{m+3}\ldots\alpha_n\right) +$$
$$+ \sum C_k^s \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-1}\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right). \tag{27}$$

Insă

$$\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right) = \lambda\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right) + 1;$$
$$\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m+1}\,\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right) = \lambda\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,0\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right) + 1;$$
$$\lambda\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,\frac{00\ldots0}{m+1}\,1\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right) = \lambda\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right) + 1;$$
$$\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right) = \lambda\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right) - 1.$$

Prin urmare

$$\sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-1}\left(\frac{11\ldots1}{m-1}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right) =$$
$$= \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-1}(\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n) +$$
$$+ \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right)\left[\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right)+1\right]^{k-1} +$$
$$+ \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right)\left[\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right)-1\right]^{k-1} +$$
$$+ \sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right)\left[\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right)-1\right]^{k-1} =$$
$$= p^m q M_m^{(k-1)}(n-m+1) =$$
$$= p^m q \sum_t C_{k-1}^s \sum P\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right)^{k-s-t}$$
$$p^m q \sum_t C_{k-s}^t \sum P\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right)\lambda\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right)^{k-s-t}. \tag{28}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicând același procedeu ca mai sus pentru termenii

$$\sum P\left(\frac{00\ldots0}{m-1}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-s-t}\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_n\right),$$

$$\sum P\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-s-t}\left(\frac{00\ldots0}{m}\,1\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_n\right),$$

obținem mai departe

$$\sum P\left(\frac{11\ldots1}{m}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)\lambda^{k-1}\left(\frac{11\ldots1}{m+1}\,0\alpha_{m+2}\ldots\alpha_n\right)=$$

$$=p^m q M_m^{(k-s)}(n-2m-1)+p^{m+1}q^m\sum_{t=1}^{k-1}C_{k-s}^t M_m^{(k-s-t)}(n-2m-1)-$$

$$-p^{m+1}q^{m+1}\sum_{t=s}^{k-1}C_{k-s}^t M_m^{(k-t)}(n-m-2)+\ldots$$

Același calcul efectuat pentru ceilalți termeni din (27) ne arată că

$$M_m^{(k)}(n)=M_m^{(k)}(n-1)+p^m q\sum_{s=1}^{k}C_k^s M_m^{(k-t)}(n-m-1)-$$

$$-p^{m+1}q\sum_{1_s}^{k}C_k^s M_m^{(k-1)}(n-m-2)+$$

$$+A_2(p)\sum_{2_s}^{k}g_s^2 M_m^{(k-s)}(n-2m-1)-$$

$$-B_2(p)\sum_{3_s}^{k}h_s^2 M_m^{(k-s)}(n-2m-2)+$$

$$+A_3(p)\sum_{3_s}^{k}g_s^3 M_m^{(k-s)}(n-3m-1)-$$

$$-B_3(p)\sum_{s=3}^{k}h_s^3 M_m^{(k-s)}(n-3m-2)+\ldots \qquad (29)$$

unde $A_i(p)$, $B_i(p)$, i având valorile ($i=1,\ 2,\ldots,k$) reprezintă polinoame în p, iar g_s^i, h_s^i sunt numere pozitive a căror valoare nu ne interesează. Trebue notat că $A_i(p)=0(p^m)$; $B_i(p)=0(p^m)$.

Din relația (29) rezultă că $M_m^{(k)}(n)$ este un polinom în n de gradul k. In adevăr, dacă admitem că această proprietate este adevărată până la momentele de ordinul $k-1$, relația de recurență (29) ne arată că este adevărată și pentru momentul de ordinul k. Pe de altă parte, am arătat în mod direct că momentele de ordinul întâi și al doilea sunt respectiv polinoame de gradul întâi și al doilea în n.

Să admitem acum că m și n cresc indefinit, satisfăcând relația:

$$p^m q^2 n = a, \tag{30}$$

unde a este o constantă și că momentul de ordinul k, pentru $h=1, 2, \ldots, k-1$, se poate scrie sub forma

$$M_m^{(k)}(n) = p^m q^2 n + \frac{\Delta_1^{(k-1)}}{1!}(p^m q^2 n)^2 + \frac{\Delta_2^{(k-1)}}{2!}(p^m q^2 n)^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta_{n-1}^{(k-1)}}{(n-1)!}(p^m q^2 n)^k + \Phi_k(m, n), \tag{31}$$

unde $\Delta_i^{(k-1)}$ reprezintă diferența de ordinul j, calculată cu numerele $1, 2^{h-1}, 3^{h-1}, \ldots$, iar $\Phi_k(m, n)$ o funcție de m și n care tinde către zero când m și n tind către infinit, îndeplinind egalitatea (30), astfel

$$\Phi_k(m, n) = 0(p^m).$$

Ne propunem să arătăm că această formulă este valabilă și pentru $h=k$.

Aceasta revine la a dovedi identitatea

$$C_k^1 \Delta_{j-1}^{(k-2)} + C_k^2 \Delta_{j-1}^{(k-3)} + \ldots + C_k^{(k-h)} \Delta_{j-1}^{(k-1)} = \frac{j-1}{j} \Delta_j^{(k-1)}. \tag{32}$$

Primul membru se poate scrie:

$$\sum_{p=0}^{j-1} C_{j-1}^p \frac{(j-p+1)^k - (j-p)^k - 1}{j-p-1} + \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^{p+1} C_{j-1}^p C_k^{j-r} (j-p)^{j-r-1}.$$

Însă

$$\sum_{p=0}^{j-1} (-1)^p C_{j-1}^p (j-p)^{j-r-1} = 0$$

pentru toate valorile lui r cuprinse între 1 și $j-1$, deoarece diferențele de ordinul $j-1$ ale șirului $x^s (t < j-1)$ sunt nule.

Rămâne de dovedit că

$$\sum_{p=0}^{j-1} C_{j-1}^p \frac{(j-p+1)^k - (j-p)^k - 1}{j-p-1} = \frac{j+1}{j} \Delta_j^{(k-1)},$$

ceeace se poate ușor verifica.

Identitatea (32) este, deci, adevărată și formula (31) este valabilă pentru toate valorile finite ale lui n, în ipoteza că $np^m q^2 \approx a$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem, deci, asimptotic

$$M_m^{(k)}(n) = a + \frac{\Delta_1^{(k-1)}}{1!} a^2 + \frac{\Delta_2^{(k-1)}}{2!} a^3 + \cdots + \frac{\Delta_{h-1}^{(k-1)}}{(h-1)!} a^h , \qquad (33)$$

unde $\Delta_i^{(k)}$ are semnificația arătată mai sus.

(33) reprezintă, însă, tocmai momentul de ordinul h al legii lui Poisson.

$$P_x = e^{-a} \frac{a^x}{x!} , \qquad (34)$$

astfel încât se poate afirma din punct de vedere statistic că iterațiile de lungime m pentru valorile lui n pentru care $p^m q^2 n > a$, unde a este o constantă, se distribue după legea lui Poisson.[1])

Și această observație are importanță din punct de vedere practic, deoarece ea ne arată că iterațiile de lungime mare, care practic se întâlnesc rar, urmează legea evenimentelor rare, dată de legea de probabilitate a lui Poisson.

[1]) *G. Mihoc*, Legea limită de probalitate a numărului de iterații de lungime dată, Analele Academiei R. P. R. Tomul II, 1950.

Valorile funcției $H(\xi)$

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\xi}^{+\xi} e^{-y^2}\, dy$$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	01128	02256	03384	04511	05637	06762	07886	09008	10128
0,1	11246	12362	13476	14587	15695	16800	17901	18999	20094	21184
0,2	22270	23352	24430	25502	26570	27633	28690	29742	30788	31828
0,3	32863	33891	34913	35928	36936	37938	38933	39921	40901	41874
0,4	42839	43797	44747	45689	46623	47548	48466	49375	50275	51167
0,5	52050	52924	53790	54646	55494	56332	57162	57982	58792	59594
0,6	60386	61168	61941	62705	63459	64203	64938	65663	66378	67084
0,7	67780	68467	69143	69810	70468	71116	71754	72382	73001	73610
0,8	74210	74800	75381	75952	76514	77067	77610	78144	78669	79184
0,9	79691	80188	80677	81156	81627	82089	82542	82987	83423	83851
1,0	84270	84681	85084	85478	85865	86244	86614	86977	87333	87680
1,1	88020	88353	88679	88997	89308	89612	89910	90200	90484	90761
1,2	91031	91296	91553	91805	92051	92290	92524	92751	92973	93190
1,3	93401	93606	93807	94002	94191	94376	94556	94731	94902	95067
1,4	95229	95385	95538	95686	95830	95969	96105	96237	96365	96490
1,5	96611	96728	96841	96952	97059	97162	97263	97360	97455	97546
1,6	97635	97721	97804	97884	97962	98038	98110	98181	98249	98315
1,7	98379	98441	98500	98558	98613	98667	98719	98769	98817	98864
1,8	98909	98952	98994	99035	99074	99111	99147	99182	99216	99248
1,9	99279	99309	99338	99366	99393	99418	99443	99466	99489	99511
2,0	99532	99552	99572	99591	99609	99626	99642	99658	99673	99688
2,1	99702	99715	99728	99741	99753	99764	99775	99785	99795	99805
2,2	99814	99822	99831	99839	99846	99854	99861	99867	99874	99880
2,3	99886	99891	99897	99902	99906	99911	99915	99920	99924	99928
2,4	99931	99935	99938	99941	99944	99947	99950	99952	99955	99957
2,5	99959	99961	99963	99965	99967	99969	99971	99972	99974	99975
2,6	99976	99978	99979	99980	99981	99982	99983	99984	99985	99986
2,7	99987	99987	99988	99989	99989	99990	99991	99991	99992	99992
2,8	99992	99993	99993	99994	99994	99994	99995	99995	99995	99995
2,9	99996	99996	99996	99997	99997	99997	99997	99997	99997	99998

Cifra întregilor este totdeauna zero. Numerele de mai sus dau valoarea celor cinci zecimale ale funcției.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚIILE PROBLEMELOR PROPUSE

La capitolul II

1. Sunt 18 cazuri posibile și 5 favorabile.

2. Sunt 18 cazuri posibile și 6 favorabile.

3. Aceeași probabilitate ca din trei extracții consecutive să se scoată o bilă albă.

4. Notând prin A apariția unei bile albe și prin N apariția unei bile negre, avem de det rminat probabilitățile succesiunilor $AANN$, $NAAN$, $NANA$, în condițiile problemei.

La capitolul III

1. Numărul cazurilor favorabile este 14×11; numărul cazurilor posibile C_{25}^{2}.

2. Se aplică formula generală dela schema bilei neîntoarse.

3. Evenimentul contrar este ca dubla 6 să nu iasă niciodată în cele 15 aruncări de zaruri, ceeace se întâmplă cu probabilitatea $\left(\frac{35}{36}\right)^{15}$. Probabilitatea căutată este deci $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{15}$.

4. Probabilitatea ca dubla 6 să nu iasă niciodată este $\left(\frac{35}{36}\right)^{15}$. Probabilitatea ca să iasă o singură dată rezultă din aplicarea formulei generale dela schema urnei lui Bernoulli. Ea este egală cu $C_{15}^{1}\left(\frac{35}{36}\right)^{14} \cdot \frac{1}{36}$. Prin urmare, probabilitatea căutată este $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{15} - C_{15}^{1} \cdot \frac{1}{36}\left(\frac{35}{36}\right)^{14}$.

5. Se aplică formula generală dela schema bilei neîntoarse.

6. Se pot număra direct cazurile favorabile. Se mai poate folosi observația că probabilitatea ca să obținem suma m este egală cu coeficientul lui x^m în polinomul $\frac{1}{6^3}(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$.

7. Aceeași indicație ca la problema precedentă. Cele două probabilități au respectiv valorile $\frac{27}{216}$ și $\frac{25}{216}$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Se aplică formulele generale din problema concordanțelor. Probabilitatea are valoarea $\frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12}$.

9. Notăm cu p_{12} probabilitatea ca să avem o concordanță la extracțiile de rangul 5 și 7, cu p_{23} probabilitatea ca să avem o concordanță la rangul 7 și 11, prin p_{31} probabilitatea că să avem o concordanță la rangul 11 și 5. Cu p_{123} notăm probabilitatea ca să avem concordanță la extracțiile de rangul 5, 7 și 11. Rezultă din teoremele generale arătate pentru evenimentele compatibile că probabilitatea căutată este $p_{12}+p_{23}+p_{31}-2p_{123}$, unde $p_{12}=p_{21}=p_{31}=\frac{1}{11 \cdot 12}$; $p_{123}=\frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12}$.

10. Se aplică formulele generale pentru schema bilei neîntoarse. Rezultatele pot fi scrise imediat: a) $\frac{C_{88}^{11} C_8^1}{C_{96}^{12}}$; b) $\frac{1}{C_{96}^{n}}\left[C_{88}^{9} C_8^3+C_{88}^{8} C_8^4+C_{88}^{7} C_8^5+\right.$ $\left.+C_{88}^{2} C_8^4+C_{88}^{5} C_8^7+C_{88}^{4} C_8^8\right]$; c) $\frac{C_{88}^{4} C_8^8}{C_{96}^{12}}$; d) $\frac{C_{88}^{12} C_8^0}{C_{96}^{12}}$.

11. Fie P_h probabilitatea ca A să obțină h puncte și Q_k probabilitatea ca B să obțină k puncte. Probabilitatea ca ambii să obțină același număr de puncte este $P_3Q_3+P_4Q_4+\ldots$ Probabilitatea ca A să obțină mai multe puncte este dată de formula $P_4Q_3+P_5(Q_3+Q_4)+\cdots+P_{12}(Q_3+Q_4+\cdots+Q_{11})$; Probabilitatea ca să câștige B este $Q_3P_2+Q_4(P_2+P_3)+\ldots Q_{18}$. Probabilitățile P_h și Q_k se determină ca la problema 6.

12 Caz particular al schemei bilei neîntoarse. Prima probabilitate este dată de formula $\frac{C_{76}^{0} C_4^4}{C_{80}^4}$. Probabilitatea pentru evenimentul al doilea este egală cu $\frac{1}{C_{80}^4}\left[C_{76}^{2} C_4^2+C_{76}^{1} C_4^3+C_{76}^{0} C_4^4\right]$.

13 Caz particular al urnei lui Bernoulli. Probabilitatea de ochire este egală cu $\frac{7}{9}$. Probabilitatea ca să nimerească de opt ori consecutiv este $\left(\frac{7}{9}\right)^8$.

14. Probabilitatea ca primul să nimerească este $\frac{8}{11}$, iar al doilea $\frac{9}{10}$. Probabilitatea căutată este $\frac{8}{11}+\frac{9}{10}-\frac{8}{11} \cdot \frac{9}{10}$.

15. Se aplică formulele clasice din teoria schemei bilei neîntoarse.

16. Cele două urne fiind identice, considerăm egală cu $\frac{1}{2}$ probabilitatea de a alege una dintre ele la întâmplare. Rezultatul este $\frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30}+$ $+\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{21}$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Caz particular al urnei lui Bernoulli $C_{10}^{6} \cdot \frac{1}{2^{10}}$.

18. Se aplică formula (7) din capitolul I.

19. Caz particular al schemei lui Poisson. Notăm cu p_k probabilitatea de a scoate o bilă albă din urna de rangul k și cu q_k probabilitatea de a scoate o bilă neagră ($q_k = 1 - p_k$). Avem $p_1 = \frac{5}{8}$; $p_2 = \frac{6}{8}$; $p_3 = \frac{7}{8}$. Probabilitatea căutată este egală cu $p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3$.

20. Fie A, B, C cei trei jucători. Prima partidă o joacă A cu B. Notăm cu p, q, r probabilitățile de câștig ale lui A, B, C după ce A a câștigat prima partidă. Avem relațiile $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r$; $q = \frac{1}{2} p$; $r = \frac{1}{2} q$. Obținem $p = \frac{4}{7}$; $q = \frac{1}{7}$; $r = \frac{2}{7}$. La începutul jocului A poate câștiga prima partidă cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ și după aceea, jocul cu probabilitatea $\frac{4}{7}$; deasemenea poate câștiga jocul pierzând prima partidă, ceeace se întâmplă cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ și să termine victorios jocul, conform rezultatului de mai sus, cu probabilitatea $\frac{1}{7}$. Deci, probabilitatea de câștig a lui A este $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$. B are aceeași probabilitate de câștig ca și A, deoarece joacă în condiții identice. Probabilitatea de câștig a lui C este $1 - \frac{5}{14} - \frac{5}{14} = \frac{4}{14}$.

21. Aceeași indicație ca mai sus.

22. Fie p_k probabilitatea de a obține o bilă albă în extracția de rangul k și q_k probabilitatea de a extrage o bilă neagră. $P = 1 - p_1 p_2 \dots p_s$.

23. În urnă avem câte 4 bile de aceeași culoare, deci în total 13 feluri de culori. Fie p_i probabilitatea ca printre cele n bile să avem 3 bile de culoarea i; p_{ij} probabilitatea ca să avem 3 bile de culoarea i și 3 bile de culoarea j; etc. Probabilitatea căutată este $P_n = \Sigma p_i - \Sigma p_{ij} + \Sigma p_{ijk} - \dots$, unde probabilitatea $p_i p_{ij} \dots$ rezultă imediat din aplicarea schemei bilei neîntoarse.

24. Probabilitatea ca în prima grupă să fie un caz favorabil este egală după schema bilei neîntoarse cu $\frac{C_{48}^{12} C_4^1}{C_{52}^{13}}$. După formarea primei părți au rămas 39 obiecte, dintre care 3 cu semn distinctiv. Probabilitatea ca în grupa a doua să avem un caz favorabil este $\frac{C_{36}^{12} C_3^1}{C_{39}^{13}}$. Probabilitatea ca în grupa treia să avem un obiect cu semn distinctiv rezultă în mod analog egală cu $\frac{C_{24}^{12} C_2^1}{C_{26}^{13}}$. Probabilitatea căutată este egală cu produsul acestor trei probabilități.

25. Aceeași indicație ca în problema precedentă.

26. Urna lui Bernoulli: $\frac{C_{20}^{8} C_{8}^{3}}{aC_{26}^{10}}$.

27. Schema bilei neîntoarse: $\frac{C_{N-a}^{n-a} C_{a}^{a}}{C_{N}^{n}}$.

28. In general, fie în urnă m bile albe și n bile negre $(m>n)$. Fie A numărul cazurilor favorabile; B numărul cazurilor când în prima extracție a ieșit o bilă neagră; C numărul cazurilor când în prima extracție a ieșit o bilă albă, dar în timpul celor $m+n$ extracții numărul bilelor albe a fost ajuns sau depășit de numărul bilelor negre. Avem $A+B+C=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$; $B=\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$; $C=\frac{(m+n+1)!}{m!\,(n-1)}$. Probabilitatea căutată este $\frac{A}{A+B+C}=\frac{m-n}{m+n}$. In cazul de față $m=18$; $n=11$.

29. Calcul analog cu cel din problema precedentă.

30. Problemă identică cu problema 28.

31. $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$.

32. $\frac{500}{1\,296}$.

33. $\frac{7\,503}{13\,860}$.

34. $C_{7}^{5}\frac{1}{2^{7}}$.

35. a) $p=\frac{61}{125}$; b) $p=\frac{1}{125}$. Se aplică formula schemei bilei neîntoarse.

36. Schema bilei neîntoarse pentru cazul unei urne cu bile de mai multe culori.

37. 361 aruncări.

38. 13 aruncări.

39. 79 experiențe.

La capitolul IV

1. Aplicăm formula lui Bayes, obținând că probabilitatea alegerii unei urne este egală cu $\frac{1}{4}$.

2. Admitem că probabilitatea alegerii unei urne este $\frac{1}{10}$.

Scanned with OKEN Scanner

La capitolul V

1. Valoarea medie a numărului de puncte obținute dintr'o aruncare de zar este $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{3}$. Aplicând teorema referitoare la sumele de variabile aleatorii, obținem $3\cdot\frac{7}{3}$. În cazul general valoarea medie este $\frac{7}{3}n$.

2. Să presupunem că în urnă sunt a bile albe și b bile negre. Probabilitatea ca să obținem k bile negre în mod consecutiv și apoi o bilă albă este $\frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-k+1)\,a}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k)}$. Valoarea medie este $\sum_{k=1}^{b} k\,\frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)\,a}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k)}$.

3. Aceeași indicație ca mai sus. Valoarea medie este $\sum_{k=1}^{n} k\,pq^k$, prin n notând numărul extracțiilor.

4. Se consideră forma pătratică $\sum_{h=1}^{n} p_h(\lambda x_h^r+\mu x_h^s)^2=\lambda^2M_{2r}+2\lambda\mu M_{r+s}+\mu^2M_{2s}$, care este pozitivă oricare ar fi λ și μ. Punând această condiție trinomului de mai sus, rezultă o inegalitate între momente, care, după câteva transformări, ne duce la inegalitatea ce trebue demonstrată.

5. Se consideră forma pătratică pozitiv definită $\Sigma p_h(\lambda_0+\lambda_1 x_h+\lambda_2x_h^2+\cdots+\lambda_nx_h^n)^2=\Sigma\lambda_j\lambda_kM_{j+k}\geq 0$ și se scrie că descriminantul ei este pozitiv.

6. Avem $\mu_k=M(x-M_1)^k$. Aplicând formula binomului rezultă egalitățile cerute.

7. Caz particular al teoremei lui Cebâșev.

8. Aceeași indicație ca mai sus.

9. A câștiga 5 lei cu probabilitatea $\frac{30}{36}$ și pierde a lei cu probabilitatea $\frac{6}{36}$. Pentru ca jocul să fie echitabil trebue să avem $\frac{30}{36}\cdot 5=\frac{6}{36}a$.

10. Probabilitatea ca să scoată 14 bile albe și k bile negre este, după schema bilei neîntoarse, $\frac{C_{31}^{14}C_{19}^{k}}{C_{50}^{14+k}}$. Valoarea medie este deci $C_{31}^{14}\sum_{k=0}^{19} k\,\frac{C_{19}^{k}}{C_{50}^{14+k}}$.

11. Probabilitatea ca la extracția de rangul k să avem o concordanță este $\frac{1}{23}$. Rezultă că valoarea medie este 1.

La Capitolul VI

1. Caz particular al urnei lui Bernoulli pentru $p=\frac{2}{3}$; $q=\frac{1}{3}$.

2. Caz particular al schemei bilei neîntoarse.

3. Caz particular al urnei lui Bernoulli.

Scanned with OKEN Scanner

4. Pentru problema 1: $\left(\frac{2}{3}e^{ti}+\frac{1}{3}\right)^6$; pentru problema 2: $\frac{1}{C_{15}^6}\sum_{k=0}^{6} C_{10}^k C_5^{6-k} e^{kti}$; pentru problema 3: $\frac{1}{36}[e^{ti}+e^{2ti}+\cdots+e^{6ti}]^2$.

5. Avem $M[e^{(a\xi+b^3)ti}]=e^{bti}M[e^{a\xi ti}]$.

6. Se calculează probabilitatea ca din aceste patru extracții să se obțină respectiv 0, 1, 2, 3, 4 bile albe și se aplică apoi definiția funcției caracteristice.

La Capitolul VII

1. Avem $\mu_k=M(X_1-p+X_2-p+\cdots+X_x-p)^k$, unde X_k reprezintă numărul de bile albe obținute în extracția de rangul k. Aplicând formula care ne dă desvoltarea expresiei $(a+b+\cdots+l)^k$ după puterile lui $a, b, c \ldots l$, se obțin formulele arătate.

2. Se aplică formula lui Bernoulli.

3. Aceeași indicație.

4. Numărul lucrătorilor din ambele regiuni este de 47 032, dintre care 15 753 sunt în vârstă de peste 35 ani. Probabilitatea ca un lucrător să fie în vârstă de peste 35 ani o considerăm egală cu $p=\frac{15\,753}{47\,032}$. Se aplică formula lui Bernoulli cu probabilitatea p și se verifică dacă față de această probabilitate frecvențele pentru regiunile A și B sunt verosimile.

5. Probabilitatea de a obține α bile albe este $\frac{C_A^{\alpha} C_B^{n-\alpha}}{C_{A+B}^n}$. Prin aplicarea formulei lui Moivre-Stirling rezultă formula aproximată.

6. Se notează $p=\frac{4\,523}{4\,523+9\,347}$, $q=\frac{9\,347}{4\,523+9\,347}$. Aplicându-se valorile funcției $H(x)$ se determină limitele în care variază abaterile pentru totalitatea scrisorilor, în baza rezultatului stabilit în problema precedentă. Valoarea medie pătratică este considerată egală cu $\sqrt{pqn\left(1-\frac{n}{N}\right)}$, unde $\frac{n}{N}=\frac{1}{10}$.

7. Problema se rezolvă în același fel ca în cazul precedent, cu diferența că în loc să se aplice datele schemei bilei neîntoarse se aplică schema urnei lui Bernoulli. Valoarea medie pătratică este în acest caz egală cu $\sqrt{pqn}$.

La Capitolul IX

1. Se folosesc proprietățile funcției $\Gamma(x)$ din analiza matematică.

2. Se demonstrează cu ajutorul funcției de repartiție. Dacă x_1 urmează legea normală, se calculează funcția de repartiție și funcția caracteristică pentru x_1^2. Se aplică apoi teorema referitoare la funcția caracteristică a unei sume de variabile independente.

3. Se aplică legea lui χ cu datele problemei.

4. Aceeași indicație.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

1. Se notează cu $f_k(n, t)$ funcția caracteristică a numărului de bile albe obținute în n extracții, după ce prima extracție a fost făcută din urna U_k. Stabilindu-se o relație de recurență pentru funcțiile $f_k(n, t)$, se arată că ele tind, pentru $n \to \infty$, către funcția caracteristică a legii normale a lui Laplace.

2. Extracțiile se succed după o lege de dependență purtând numele de lanț Markov. La fel ca și în problema precedentă, se arată că frecvența corespunzătoare numărului de bile albe extrase se supune la limită legii normale a lui Laplace.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

A. N. Kolmogorov, Osnovnie ponlatia teorii veroiatnostei, ONTI, 1936.

B. V. Gnedenko, Kurs teorii veroiatnostei, Gostehteorizdat, Moskva-Leningrad, 1950.

A. I. Hincin, Metoda funcțiilor arbitrare și lupta împotriva indealismului în teoria probabilităților. Analele Româno-Sovietice, Matematică-Fizică, Nr. 2, 1953.

O. Onicescu, Calculul probabilităților, Curs litografiat, Facultatea de Matematică și Fizică, București, 1950.

O. Onicescu și *Gh. Mihoc,* Calculul probabilităților, 1939.

TABLA DE MATERII

		Pag.
Cap. I.	**Noțiunea de probabilitate**	5
	1. Considerații introductive	5
	2. Probabilitate, frecvență	12
	3. Prezentarea axiomatică	15
	4. Schema lui Kolmogorov	21
	Probleme	24
Cap. II.	**Probabilități condiționate**	26
	1. Definiții	26
	2. Evenimente independente	28
	3. Regula lui Bayes	29
	Probleme	30
Cap. III.	**Probleme clasice din teoria probabilităților**	32
	1. Schema lui Bernoulli	32
	2. Schema lui Poisson	35
	3. Schema bilei neîntoarse	36
	4. Adunarea probabilităților în cazul evenimentelor compatibile	37
	5. Problema concordanțelor	41
	6. Aplicații la studiul probabilităților de viață	42
	7. Metoda coeficienților nedeterminați	43
	8. Teorema de înmulțire a probabilităților. Inegalitatea lui Boole	44
	Probleme	46
Cap. IV.	**Probabilitatea cauzelor**	49
	1. Regula de inducție a lui Bayes	49
	2. O nouă deducere a formulei lui Bayes	53
	Probleme	56
Cap. V.	**Valori medii**	57
	1. Variabila aleatorie. Valori medii	57
	2. Valoarea medie a sumei și produsului a două variabile aleatorii	59
	3. Momente. Media armonică și media geometrică	62
	4. Abaterea medie pătratică. Inegalitatea lui Cebâșev	64
	5. Abaterea medie pătratică a unei sume	67
	6. Inegalități între valori medii	67
	Probleme	70

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

Cap. VI. **Variabila aleatorie. Funcția de repartiție. Funcția caracteristică** 72
1. Variabila aleatorie 72
2. Funcția de repartiție 73
3. Densitate de probabilitate 75
4. Funcția caracteristică 76
5. Determinarea funcției de repartiție 79
6. Proprietăți generale ale funcției caracteristice . 80
7. Teoreme de convergență 81
8. Funcția caracteristică a sumelor de variabile independente 83
Probleme 84

Cap. VII. **Urna lui Bernoulli** 85
1. Considerații generale 85
2. Probabilitatea P_2 86
3. Legea lui Laplace 87
4. Probabilitatea ca abaterea să fie cuprinsă într'un interval 92
5. Demonstrarea teoremei centrale a teoriei probabilităților, cu formula lui Moivre-Stirling . . 94
6. O altă demonstrație a teoremei centrale . . 99
7. Teorema lui Liapunov 101
Probleme 103

Cap. VIII. **Legea evenimentelor rare** 105
1. Formula lui Poisson 105
2. Distribuțiile lui Bortkievici 106

Cap. IX. **Schema lui Bernoulli cu mai multe stări** . . 108
1. Considerații generale 108
2. Aproximarea probabilităților $P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. 108
3. Distribuția variabilei x^2 110
Probleme 115

Cap. X. **Legea numerelor mari** 116
1. Considerații generale 116
2. Moduri de convergență 117
3. Teorema lui Bernoulli 118
4. Teorema lui Poisson 119
5. Teorema lui Cantelli 122
6. Convergența variabilelor aleatorii, în general . 131
Probleme 133

Cap. XI. **Probabilitatea erorilor** 134
1. Considerații generale 134
2. Distribuția erorilor accidentale 135
3. Demonstrația lui Gauss 136
4. Extinderea la cazul mai multor dimensiuni . . 142
5. Reducerea la forma canonică 143
6. Determinarea legii de probabilitate în cazul general 144
7. Elipse de egală probabilitate 145
8. Valoarea momentelor de ordinul al doilea . . 148
9. Determinarea practică a coeficienților care intră în legea lui Bravais 149

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

Cap. XII. **Teoria dispersiunii** 152

1. Considerații generale 152
2. Utilizarea schemei lui Poisson 159
3. Tabela lui Czuber 162
4. Schema cu dispersiune supranormală 163
5. Cazuri mai generale 182

Cap. XIII. **Iterații** 186

1. Considerații generale. Definiții 186
2. Problema iterațiilor pentru un caz particular de lanț Markov 187
3. Cazul urnei lui Bernoulli 188
4. Diferite probleme 189
5. Calculul momentului de ordinul al doilea . . 191
6. Legea limită redusă 194
7. Legea limită în condiții suplimentare 197

Valorile funcției $H(\xi)$. 202

Soluțiile problemelor propuse 203

Scanned with OKEN Scanner

Responsabil de carte: Neicov V.
Tehnoredactor: Vasilescu M.
Corector resp.: Neicov V.

Dat la cules: 14. 04. 54. Bun de tipar: 28. 04. 54. Hârtie: velină de 65 g/m², 61×86/16. Coli editoriale: 13. Coli tipar: 13,50. Prețul: lei 5,45. A. 0144/1954.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 519.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 519.2

Tiparul executat sub comanda PRT 2293 de Intreprinderea Poligrafică Timișoara, Str. Popa Șapcă 8. Timișoara R. P. R.

Scanned with OKEN Scanner

ERATA

Nr. paginii şi rîndului	In loc de	Se va citi	A cui este vina
p. 26 r. 7	$P(A \cap B) \geq 0$	$P(A \cup B) \geq 0$	Editurii
p. 61 r. 19	$= M(X_2), \ldots$	$= M(X_1), M(X_2), \ldots$	Editurii
p. 95 r. 9 de jos	e^{-x} (a)	e^{-x^2} (a)	Editurii
p. 113 r. 5	$D^2_{s-1} = \cdots - (\sqrt{p_{s-1}q_{s-2}}\eta_{s-1} + \cdots$	$D^2_{s-1} = \cdots - (\sqrt{p_{s-1}q_{s-1}}\eta_{s-1} + \ldots$	Editurii
p. 118 r. 15	$\lvert f_n - p \rvert \varepsilon < n, \ldots$	$\lvert f_n - p \rvert < \varepsilon, \ldots$	Tipogr.
p. 124 r. 4	$3p^2q^2 - \frac{6p^2q^2}{i} + \frac{nq}{i} \leq 3p^2q^2 + \frac{nq}{i} \leq \cdots$	$3p^2q^2 - \frac{6p^2q^2}{i} + \frac{pq}{i} \leq 3p^2q^2 + \frac{pq}{i} \leq \cdots$	Editurii
p. 128 r. 4	$\gamma_2 = t_3\gamma_3 + t_3\theta + \theta = 1$	$\gamma_2 = t_3\gamma_3 + t_3\theta + \theta - 1$	Editurii
p. 174 r. 2 şi 5 de jos	$P(n, \lambda)$	$P'(n, \lambda)$	Tipogr.
p. 176 r. 11 şi 15	$-\lambda p'' e^{1-\theta ti} \lambda p'' e^{(1-\theta ti}$	$-\lambda p'' e^{(1-\theta)ti} \lambda p'' e^{(1-\theta)ti}$	Tipogr.
p. 178 r. 26	$\ldots$, rezultă $p'' = 1$	$\ldots$, rezultă $q'' = 1$.	Editurii
p. 178 r. 28	$\ldots$, rezultă $q'' = 1$,	$\ldots$, rezultă $p'' = 1$	Editurii
p. 184 r. 11	$p_{221} = h = \frac{(m+1)h^2}{m}$	$n_{221} = h - \frac{(m+1)h^2}{m}$	Editurii
p. 192 r. 3 de jos	$d = \Sigma P(\ldots$	$= p\Sigma P(\ldots$	Tipogr.
p. 200 r. 4 de jos	$\cdots \frac{(j-p+1)-(j-p)^k-1}{j-p-1} = \ldots$	$\cdots \frac{(j-p+1)^k-(j-p)^k-1}{j-p-1} = \cdots$	Tipogr.
p. 205 r. 19	de rangul	de rangul k	Editurii
p. 208 r. 3	5. Avem $M[e^{(a\xi+b^8)ti}] = \ldots$	Avem $M[e^{(a\xi+b)ti}] = \cdots$	Editurii

Scanned with OKEN Scanner